

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

М.Л. Фильченков, Ю.П. Лаптев

*Институт гравитации и космологии РУДН  
Российская Федерация, 115419, Москва, ул. Орджоникидзе, 3*

**Аннотация.** Проанализированы квантовая теория и теория относительности, а также их возможные согласования, с точки зрения используемых в них математических моделей, экспериментального подтверждения, интерпретаций и отнесения их к дуалистическим парадигмам.

**Ключевые слова:** математические модели, дуалистические парадигмы, теория относительности, квантовая теория, квантование гравитации.

### Введение

Для описания физических объектов и явлений теоретическая физика использует математические модели. Физические объекты и явления относятся к материальному миру Аристотеля, в то время как используемый для их описания математический аппарат относится к идеальному миру Платона. Соотношение между этими мирами является основным вопросом философии о том, что первично материя или сознание.

Описание одних и тех же физических объектов и явлений, вообще говоря, возможно в рамках различных физических теорий. Кроме того, одни и те же физические теории допускают различные интерпретации. Существует несколько классификаций физических теорий в зависимости от степени их экспериментального подтверждения и используемых дуалистических парадигм, объединяющих категории пространства-времени, частиц и полей. Математические модели в теоретической физике используют формализм, относящийся к различным разделам математики, например, описывающим количество (теория чисел), структуру (алгебра), пространство (геометрия), изменение (математический анализ) и т. д. Дуалистические парадигмы: геометрическая (пространство-время и поля), теоретико-полевая (поля и частицы) и реляционная (пространство-время и частицы).

Ниже проанализированы квантовая теория и теория относительности, а также их возможные согласования, с точки зрения используемых в них математических моделей, экспериментального подтверждения, интерпретаций и отнесения их к дуалистическим парадигмам.

Речь пойдёт о попытках согласования теории гравитации с квантовой теорией. Гравитация будет рассматриваться в рамках ОТО и ньютоновской

теории, а квантовая теория на уровне квантовой механики и квантовой теории поля. Квантование будет проводиться по теории возмущений с введением гравитонов для слабых гравитационных полей, а также непertурбативными методами для геометрии в целом и пространства-времени [1–6].

### Квантовая теория

Квантовая теория, которая делится на квантовую механику (КМ) и квантовую теорию поля (КТП), полностью подтверждена экспериментально, имеет несколько интерпретаций, особенно на уровне КМ (копенгагенская, статистическая и многомировая интерпретации) и относится к теоретико-полевой парадигме. В КМ наблюдаемые значения физических величин являются собственными значениями операторов, которым они сопоставляются. В классической механике собственные значения операторов соответствуют интегралам движения (энергии, импульса и углового момента), а именно:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = E\psi, \quad (1)$$

где  $E = \text{inv.}$  – собственное значение оператора энергии, аналогично для импульса:

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial q} = p\psi. \quad (2)$$

Для момента импульса  $q = \varphi, p = p_\varphi$ . Вид квантовых дифференциальных операторов связан с симметриями пространства и времени. В КМ имеет место корпускулярно-волновой дуализм, который означает, что уравнения для частиц эквивалентны уравнениям для волн при замене указанных выше физических величин на операторы. Последние действуют на волновую функцию, удовлетворяющую уравнению Шрёдингера. Оно следует из (1) после замены физических величин в тождестве  $E = H(q, p)$  на операторы.

В КТП существует дуализм частица – поле. Свободные частицы являются квантами полей материи с полуцелым спином и полей переносчиков взаимодействий (между частицами материи) с целым спином, то есть калибровочных полей – абелевых для электромагнитного взаимодействия, соответствующих группе  $U(1)$ , а также неабелевых для слабых взаимодействий, соответствующих группе  $SU(2)$ , и сильных – группе  $SU(3)$ .

### Теория относительности

Теория относительности делится на специальную и общую. Специальная теория относительности (СТО) полностью подтверждена экспериментально, имеет одну интерпретацию, объединяющую пространство и время в пространстве Минковского с интервалом:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (3)$$

и относится к реляционной парадигме, если рассматривается только кинематика свободных частиц, функция Лагранжа для которых запишется как

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (4)$$

где  $m$  – масса, а  $v$  – скорость частицы. Общая теория относительности (ОТО) частично подтверждена экспериментально, обобщает специальную, учитывая тяготение путём замены плоского пространства Минковского на искривлённое риманово пространство с интервалом

$$ds^2 = g_{ik} (x^i) dx_i^2 dx_k^2, \quad (5)$$

где  $g_{ik}$  – метрика риманова пространства, которая находится из тензорных уравнений Эйнштейна – Гильберта:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}, \quad (6)$$

где  $R = g^{ik} R_{ik}$  – скалярная кривизна,  $R_{ik} (\Gamma_{kl}^i)$  – тензор Риччи,  $\Gamma_{kl}^i$  – символ Кристоффеля, играющий в ОТО роль напряжённости гравитационного поля. ОТО, сформулированная в рамках геометрической парадигмы, в случаях высокой симметрии допускает и теоретико-полевую интерпретацию в пространстве Минковского. Это касается гравитационных волн, космологии и движения тел в центрально-симметричном гравитационном поле, для которого в этом случае лагранжиан запишется в виде

$$L = -mc^2 \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(1 + \frac{2\varphi_g}{c^2}\right)}, \quad (7)$$

где  $\varphi_g$  – потенциал гравитационного поля.

### Согласование квантовой теории с теорией относительности

Что касается СТО, то она полностью согласуется как с КМ на уровне релятивистской квантовой механики бесспиновых частиц (уравнение Клейна – Гордона – Фока) и частиц со спином  $s = \frac{1}{2}$  (уравнение Дирака), так и на уровне КТП при введении операторов рождения и уничтожения частиц, которые являются квантами соответствующих полей.

Более сложной является проблема согласования квантовой теории с ОТО, связанная с проблемой квантования гравитации. Гравитация рассматривается в рамках ОТО и ньютоновской теории, а квантовая теория на уровне квантовой механики и квантовой теории поля. Квантование проводится по теории возмущений с введением гравитонов для слабых гравитационных полей, а также непertурбативными методами для геометрии в целом и пространства-времени. Возможны различные уровни квантования в теории гравитации:

- квантовая механика в гравитационном поле;
- квантовая теория поля в искривлённом пространстве-времени;
- квантование гравитационного поля и искривлённого пространства-времени.

Рассматривается КМ в заданном слабом гравитационном поле с учётом релятивистских поправок (приближение Паули), рождение частиц и поляризация вакуума вблизи горизонтов центрально-симметричных метрик Рейсснера–Нордстрёма и Котлера, а также рождение частиц во фридмановской Вселенной.

Температура частиц, рождённых в эффекте Хокинга:

$$kT_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi GM}, \quad (8)$$

где  $M$  – масса чёрной дыры.

В ранней Вселенной частицы рождаются в результате разрыва виртуальной пары на масштабе их комптоновской длины волны. Число рождённых частиц в начале радиационно-доминантной фазы:

$$N = 10^{-3} \left(\frac{m}{\hbar}\right)^2 a_0^3, \quad (9)$$

где  $m$  – масса частиц,  $a_0$  – коэффициент в зависимости масштабного фактора от времени  $a(t) = a_0\sqrt{t}$ .

Квантование слабого гравитационного поля проводится в пространстве Минковского, квантами которого являются гравитоны – безмассовые частицы со спином  $s = 2$ . Однако при энергиях, стремящихся к планковской, теория возмущений становится неприменимой, поэтому используются непертурбативные методы:

1) квантовая геометродинамика, представляющая собой квантование геометрии в целом, когда волновая функция рассматривается в пространстве 3-геометрий и удовлетворяет уравнению, аналогичному стационарному уравнению Шрёдингера – уравнению Уилера-ДеВитта

$$l_{pl}^4 G_{ijkl} \frac{\delta^2 \psi}{\delta \gamma_{ij} \delta \gamma_{kl}} + R^{(3)} \psi = 0, \quad (10)$$

где  $l_{pl}$  – планковская длина,  $G_{ijkl}$  – суперметрика,  $\gamma_{ik}$  – пространственная метрика,  $R^{(3)}$  – 3-кривизна;

2) петлевая квантовая гравитация, которая обобщает квантовую геометродинамику на масштабах, сравнимых с  $l_{pl}$  и представляет собой квантование пространства-времени, в котором геометрические величины являются операторами.

Существующие подходы к квантованию в теории гравитации не подтверждены экспериментально и относятся в основном к теоретико-полевой парадигме, хотя при квантовании искривлённого пространства времени используется также и геометрическая парадигма.

## Заключение

Одни и те же физические явления могут быть описаны с помощью физических теорий, допускающих интерпретации в рамках различных дуалистических парадигм. Примером могут служить различные интерпретации ОТО

в рамках геометрической и теоретико-полевой парадигм. Подходы, претендующие на согласование этих теорий, сталкиваются с концептуальными трудностями, связанными с несовместимостью дуалистических парадигм, к которым они относятся, хотя некоторые успешно используются в областях их применимости.

### Литература

1. Пенроуз Р. Путь к реальности, или Законы, управляющие Вселенной. М.: Регулярная и хаотическая динамика, 2007. 912 с.
2. Пенроуз Р. Новый ум короля. М.: Едиториал УРСС, 2003. 384 с.
3. Владимиров Ю.С. Метафизика и фундаментальная физика. Кн. 2: Три дуалистические парадигмы XX века. М.: Ленанд, 2017. 248 с.
4. Фильченков М.Л., Лантев Ю.П. Многогранность квантовой теории // Метафизика. 2015. № 2 (16). С. 91–98.
5. Фильченков М.Л., Лантев Ю.П. Об интерпретациях общей теории относительности // Метафизика. 2017. № 4 (26). С. 126–130.
6. Фильченков М.Л., Лантев Ю.П. О проблеме квантования в теории гравитации // Метафизика. 2019. № 2 (32). С. 108–112.

## MATHEMATICAL MODELS IN THEORETICAL PHYSICS

M.L. Fil'chenkov, Yu.P. Laptev

*Institute of Gravity and Cosmology, RUDN University  
3, Ordzhonikidze St., Moscow, 115419, Russian Federation*

**Abstract.** Quantum theory and relativity theory as well as possible reconciliation have been analyzed from the viewpoint of mathematical models being used in them, experimental affirmation, interpretations and their association with dualistic paradigms.

**Keywords:** mathematical models, dualistic paradigms, relativity theory, quantum theory, gravity quantization.