DOI: 10.22363/2224-7580-2022-4-22-50

«НЕСТАНДАРТНЫЙ» ФОРМАЛИЗМ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ I: СПЕКТР МАСС

С.А. Векшенов

Российская академия образования
Российская Федерация, 119121, Москва, ул. Погодинская, д. 8

Аннотация. В квантовой теории присутствуют как точечные, так и целостные объекты. При этом техника вычислений основана исключительно на теоретико-множественных структурах, сопряженных с точечной моделью континуума. Переход к целостным динамическим структурам дает возможность развить новые методы, которые позволяют получить полезные результаты, в частности, вывести формулу спектра определенного класса частиц: $m = m_e(l + k/2^m)(\acute{l} + s/2^t)$. Данная формула является обобщением формулы, полученной В.В. Варламовым в 2017 году. В целом подобный подход созвучен с концепцией так называемого «нестандартного анализа», в котором ключевую роль играют «числа-монады».

Ключевые слова: теоретико-множественные структуры, алгебраические объекты, фундаментальные вращения, двойственность, спин, массы микрочастиц

Введение

Хорошо известно, что основной абстракцией классической физики является материальная точка. Согласно аксиоме Кантора, «недоказуемой по самой своей природе», имеется взаимно однозначное соответствие между точками прямой и действительными числами, которые образуют непрерывный континуум. Процесс измерения в этом случае сводится к «взаимодействию» физической величины A с точкой t на шкале измерительного прибора, результатом которого будет действительное (фактически рациональное) число λ, теоретически принадлежащее всей области действительных чисел D. Можно сказать, что физическая величина потенциально может иметь значения из всей области D, но в момент измерения («взаимодействия» с точкой – стрелкой прибора) она принимает конкретное значение из D.

В квантовой теории ситуация сложнее.

Основой формализма квантовой теории является некая, не сводимая к точке, абстрактная целостность («состояние»), которая присутствует во всех версиях теории. В качестве такой абстракции выбирается волна де Бройля $\psi = e^{i\mu f}$. Поскольку для любых волн (в том числе и абстрактных) справедлив принцип суперпозиции, естественно представить многообразие этих волн как линейное (конкретно гильбертово) пространство над полем комплексных чисел.

«Взаимодействие» физической величины A с абстракцией ψ, как известно, сводится к поиску собственных значений линейного самосопряженного оператора A, который отождествляется с этой физической величиной: $A\psi = \lambda\psi$. Набор λ_i определяет спектр возможных значений величины A, он может быть как дискретным, так и непрерывным. С другой стороны, как известно, ψ можно представить в виде $\psi = \sum \lambda_i \psi_i$, где ψ_i – собственные вектора (состояния), отвечающие собственным значениям λ_i. Таким образом, можно сказать, что абстрактному объекту ψ соответствует спектр действительных чисел λ_i, определяемых величиной A. Чтобы осуществить процесс измерения физической величины A, необходимо, как и в классическом случае, определить одно из значений λ_i из возможных значений A, в данном случае – из спектра оператора A. Проблема заключается в том, что процесс измерения – это взаимодействие величины A и некоторой точки, которой в данной модели нет в принципе. Единственно возможное решение состоит в том, что в момент измерения целостность ψ «превращается» в точку и, значит, величина A принимает одно из возможных значений из спектра. Подобная ситуация, как известно, является источником многочисленных гипотез о том, что представляет собой этот процесс «редукции» и какова его физическая или информационная суть. Разумеется, за обрисованной логической неизбежностью может стоять конкретный физический или информационный процесс, однако в данный момент важна именно логическая сторона проблемы.

Сопоставление этих двух общих схем формализмов позволяет очертить суть проблемы. С одной стороны, ψ это некоторая целостность, не разложимая на отдельные составляющие. С другой стороны, это обычная комплекснозначная функция переменных r и t, области определения которых – множества. Эта функция может, например, зависеть или не зависеть от времени t, что дает две существенно различные с точки зрения физики модели квантового мира: картины Шредингера и Гейзенберга соответственно. В целом же названные выше математические концепции вполне уживаются на одном квантовом поле, но одновременно являются источником разнообразных артефактов, которые бывает трудно отделить от собственно «природы вещей».

Эта ситуация во многом напоминает ситуацию с математическим анализом после работ О. Коши, К. Вейерштрасса, Р. Дедекинда и Г. Кантора, когда был окончательно сформирован его теоретико-множественный фундамент. Однако в аппарате анализа со времени его возникновения существенную роль играло «исчисление бесконечно малых», которое, в свою очередь, возникло в рамках «монадологии» Г.В. Лейбница. Монада, по Лейбницу, это динамическая целостность «без окон», то есть без доступа к внутренней структуре. Лейбниц оперировал с монадами, как с числами, что позволило разработать мощный, хотя математически далеко не строгий аппарат. В классическом анализе «монадный» и ε-δ-аппарат достаточно спокойно взаимодействуют, хотя коллизии возникают. Тем не менее основной аппарат анализа оставался теоретико-множественным (включающим ε-δ-технику). Однако в 1961 году ситуация изменилась. Опираясь на теорему компактности А.И. Мальцева, А. Робинсон разработал технику ультрапроизведений, позволяющую дать строгую трактовку идеи Лейбница – представить бесконечно малые не как переменные, а как особый вид чисел. Дальнейшее развитие этого подхода показало следующее: в концептуальном плане анализ принципиально не изменился (утрата аксиомы Архимеда не в счет), но опора на числа – монады позволила развить методы, с помощью которых удалось решить ряд задач, которые не поддавались решению стандартными методами анализа.

В квантовой теории роль монады играет волна де Бройля. Однако эта «монада», вопреки концепции Лейбница, имеет «окна», позволяющие оперировать с ее структурой. Возникает вопрос, нельзя ли развить квантовую теорию, в которой идея целостности волны де Бройля была бы поднята до уровня настоящей монады с корректными алгебраическими операциями, то есть фактически до уровня «нестандартной» квантовой теории? Как и в случае анализа, речь идет не о новой теории или новой интерпретации, а исключительно о новом техническом аппарате, который позволяет перевести аналитические методы в алгебраические. Круг решаемых задач при этом увеличивается.

Основная идея состоит в том, чтобы «упаковать» волну де Бройля в целостное абстрактное вращение (образно говоря, «закрыть окна») и сделать ее полноценной монадой. В дальнейшем будем называть такое вращение фундаментальным. Единственной характеристикой фундаментального вращения является его направление: «по» и «против» часовой стрелки. Этого свойства, как оказывается, достаточно чтобы образовать последовательность монад с различными направлениями, которую можно отожествить с действительным числом.

Таким образом, обозначился подход, который позволяет перейти от ключевой для квантовой теории идеи целостности непосредственно к действительным числам, минуя аппарат гильбертовых пространств. Этот подход ближе к соответствию, зафиксированному в аксиоме Кантора.

В данной работе мы покажем, что обрисованный подход не только математически корректен, но и содержателен с точки зрения физики.

В данной работе реализуется следующая логика.

1. Обосновывается гипотеза, что переход на микроуровень логично связать с переходом к «структуре» точки, которая является основной абстракцией классической механики. Это означает переход к действительному числу, то есть некоторому процессу. Важным моментом, является то, что этот процесс должен определяться исключительно на основе идеи «направления», без использования каких-либо метрических характеристик.

2. Определяется область W структурированных «монад», которая формально изоморфна множеству действительных чисел, но арифметические операции в ней определены особым образом, на основе отношения «раньше – позже», что позволяет мыслить действительные числа исключительно как процессуальные конструкции.

3. Обосновывается возможность использования W как модельной среды неприводимых унитарных представлений групп вращений и строится спектр неприводимых унитарных представлений группы Лоренца.

4. Рассматривается возможность интерпретации элементов W как действий (путем «открытия окон» и обращения к внутренней структуре). При этом дискретная структура W существенно упрощает изучение симметрии, как отдельных элементов W, так и их совокупностей. Симметрия структуры действия соотносится с его экстремальным значением. Используя технику, основанную на методологии А.П. Ефремова, из симметричной двухкомпонентной структуры из W «извлекается» уравнение Шредингера. Из более сложной, но также симметричной структуры можно извлечь уравнение Дирака. Таким образом, в рамках W возможна реализация общей методологии физической теории: от действия к уравнению, причем в алгебраической форме.

5. В области W можно реализовать идею Ю. Вигнера, что элементарная частица отождествляется с неприводимым унитарным представлением группы Лоренца (у Вигнера идет речь о группе Пуанкаре, но в данном случае достаточно именно группы Лоренца). Это позволяет получить следующую общую формулу спектра масс: $m = m_e(l + k/2^m)(\acute{l} + s/2^t)$, где числа: l *и* $\acute{l}$ – целые или полуцелые числа, k, m, s, t – целые числа. Основными являются переменные l и $\acute{l}$, числа k, l, s, t выступают параметрами «тонкой настройки». Если эти параметры положить равными 1, то возникает формула: $m = m_e(l + 1/2)(\acute{l} + 1/2)$, которая была получена В.В. Варламовым (2017) на основе иных соображений.

Перейдем к реализации вышеозначенной логики.

1.

Прежде всего, необходимо более внимательно посмотреть на конструкции, связанные с понятием числа.

Как известно, одним из идейных центров современной математики является расширяющаяся цепочка чисел: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Натуральные числа вкладываются в целые, отношение двух целых чисел образует рациональное число, фундаментальные последовательности рациональных чисел мыслятся как новые, действительные числа, наконец, упорядоченная пара действительных чисел (или иная форма представления) мыслится как комплексное число. Важным моментом этой цепочки является её строго редукционный характер: каждый новый вид чисел строится только на основе чисел из предыдущего звена цепочки.

Отношение этих чисел к миру вещей также хорошо известно: натуральные числа – это количество предметов и порядок при счете, рациональное число – результат измерения некоторой величины, действительные числа – модель неограниченной точности измерения, комплексные числа в экспоненциальной форме – это амплитуда вероятности нахождения квантового объекта в данной точке.

На общепринятую концепцию числа решающее влияние оказали работы Р. Дедекинда: «*Stetigkeit und irrationale Zahlen*» (1872) и *«Was sind und was sollen die Zahlen*» (1893) [6]. В них он, в частности, сформулировал и довел до логического завершения утверждение, что имеется взаимно однозначное соответствие между точками прямой и действительными числами. Разумеется, это утверждение является аксиомой, «недоказуемой по самой ее природе» (выражение принадлежит Г. Кантору, которому часто приписывают эту аксиому). Тем не менее эта аксиома столь прочно вошла в контекст теории действительных чисел, что воспринимается как нечто само собой разумеющееся. Действительная прямая (плоскость, пространство, многообразие) становится неотъемлемым инструментом описания реальности и фактически сливается с ней.

Континуум действительных чисел, равно как и точечный континуум, наряду с хорошо известными, исключительно важными качествами, имеет ряд проблемных свойств.

1. Многообразие всех действительных чисел (мы избегаем употреблять в данном случае термин «множество», причины этого будут прояснены ниже) невозможно эффективно вполне упорядочить. Это значит, что нельзя установить, например, что больше: $0 > 1$ или $1 > 0$, поскольку не существует процедуры, позволяющей по любым двум элементам континуума установить, какой из них больший. Этот факт остается в тени, поскольку в реальности мы имеем дело с некоторым обозримым множеством действительных (а чаще рациональных) чисел. Как следствие, точки, соотнесенные с действительными числами, становятся различимыми только умозрительно – на основе аксиомы выбора.

2. Попытка умозрительного описания движения в точечном континууме как перехода от точки к точке приводит к парадоксам Зенона, осмысление которых требует привлечения бесконечности, которая в определенном смысле «сильнее» привычной теоретико-множественной бесконечности.

Несмотря на названные проблемы, данная концепция обладает очень большими внутренними возможностями для описания физических процессов в макромире, поскольку основной абстракцией такого описания является именно точечный материальный объект.

Высказанная Дедекиндом идея автономии действительного числа от процедуры измерения и, следовательно, от точечной интерпретации видится принципиальным шагом, позволяющим развить концепцию действительного числа, которая позволяет интерпретировать его как неточечный объект, обладающий внутренним движением.

1.1.

Сформулируем подход, который позволяет построить искомую конструкцию действительного числа.

Начнем с классической схемы аксиом натуральных чисел:

– единица является натуральным числом;

– единица не следует ни за каким натуральным числом;

– число, *следующее за* натуральным числом, является натуральным;

– если натуральные числа совпадают, то следующие за ними числа также совпадают;

– (аксиома индукции): если какое-либо предположение доказано для единицы (база индукции) и если из допущения, что оно верно для натурального числа, вытекает, что оно верно для *следующего* за ним натурального числа (индукционное предположение), то это предположение верно для всех натуральных чисел.

Как видно из аксиом, натуральный ряд строится на основе только операции следования, само же натуральное число можно мыслить исключительно в порядковом смысле – как число шагов от начала отсчета. В этом случае модель натурального ряда может быть изображена как последовательность однонаправленных шагов – «стрелок»:

$$\to\to\to\ldots\to\to\to\ldots$$

Каждый такой шаг будем соотносить с единицей. Из соображения удобства будем изображать эти шаги вертикальными стрелками: $\uparrow\uparrow\ldots\uparrow\ldots$

Отметим два важных момента. Шаг, изображаемый стрелкой, существует исключительно в сознании, что делает число сущностью, автономной от геометрической интерпретации (этот момент неоднократно подчеркивал Р. Дедекинд). Аксиома индукции подчеркивает тот факт, что в понятие числа имманентно входит потенциальная бесконечность.

Если к названным однонаправленным стрелкам добавить стрелки противоположного направления, то конечные и неограниченные совокупности различных комбинаций таких стрелок, как показал Дж. Конвей, можно превратить в многообразие действительных чисел. В оригинальной конструкции Конвея [10] присутствуют не стрелки, а «сечения», стрелки появляются в книге А.А. Кириллова [9], но именно стрелки позволяют увидеть искомую интерпретацию.

Названная структура будет представлять для нас особый интерес, поэтому рассмотрим ее более внимательно.

Структуру последовательностей можно представить в виде следующего дерева (рис. 1).

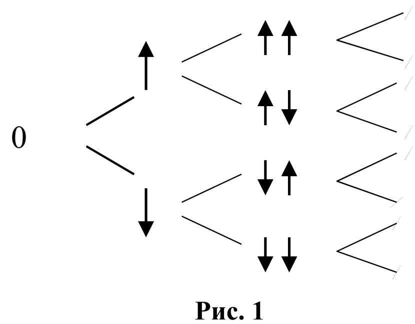

Рис. 1

Попытаемся вначале посмотреть на нее в динамике. Все числа-последовательности – начинаются в нуле. Можно сказать, что «источником» чисел-последовательностей является ноль. При этом каждую вершину, до которой «дошла» последовательность, тоже можно считать «источником» последующих чисел-последовательностей. Таким образом, всё приведенное выше дерево, если посмотреть на него в динамике, можно считать своеобразным «фронтом волны», распространение которого, как и полагается, подчиняется некому «принципу Гюйгенса». Разумеется, это только образ, но он оказывается очень полезным при определении арифметических операций.

Введем два отношения: «больше – меньше», «раньше – позже».

Возьмем два числа – последовательности α и β и запишем их одно под другим, например, β под α. Будем последовательно сравнивать знаки, входящие в их запись. Если первым из неодинаковых знаков будет $\uparrow$, то будем считать, что $\alpha > \beta$, если же знак $\downarrow$, то $\alpha < \beta$. Возможен случай, когда α короче β и является его началом. Тогда, если первым после α является знак $\uparrow$, то $\alpha < \beta$, если $\downarrow$, то $\alpha > \beta$.

Будем говорить, что число α возникло позже числа β (обозначаем как $\alpha \to \beta$), если путь от 0 к α проходит через число β. Используя аналогию с волновым фронтом, можно сказать, что числа α и β принадлежат одному лучу и β предшествует α.

Сложения двух чисел осуществляются на основе двух принципов:

1) очередности;

2) простоты.

Это означает, что сложение двух чисел $\alpha + \beta$ определяется сначала для всех более ранних чисел по каждому из слагаемых, причем в качестве результата рассматривается самое раннее число. Эти принципы однозначно определяют правило сложения. Соответствующим образом можно определить и другие арифметические операции.

Опираясь на отношение «раньше – позже», можно определить отношение «больше – меньше» и проверить выполнение для него всех аксиом действительных чисел. Это было сделано Дж. Конвеем еще в 1974 году.

Можно установить следующее соответствие между последовательностями стрелок и привычной записью действительных чисел:

$$\uparrow \sim 1;$$
$$\downarrow \sim -1;$$
$$\uparrow\downarrow \sim 1/2;$$
$$\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\ldots \sim 1/3.$$

Таким образом, в данной модели действительные числа возникают не как результат макроскопического измерения, а как структура некоторого абстрактного процесса (строго говоря, этот процесс можно интерпретировать привычным образом – как последовательное приближение к точке, определяемой числом, причем с двух сторон). Примечательно, что этот абстрактный процесс можно мыслить как «смесь» из противоположно направленных движений. Переходя в плоскость абстракции, можно сказать, что мы имеем дело с двумя противоположно направленными потоками времени, которые, взаимодействуя, образуют структуру, соотносимую с действительным числом.

Интерес к этой модели в контексте данной работы вызван следующими обстоятельствами.

Понятие точки является основной абстракцией классической механики. Соответственно, на основе этой абстракции строится классическая, теоретико-множественная модель пространства и времени. Переход на микроуровень логично связать с переходом к «структуре» точки. Опираясь на аксиому Кантора, это означает переход к действительному числу, то есть некоторому процессу. Важным моментом является то, что этот процесс должен определяться исключительно на основе идеи «направления», без использования каких-либо метрических характеристик. Приведенная выше конструкция Конвея полностью удовлетворяет этому требованию. В ней действительные числа представляют собой дискретную структуру, образованную на основе «квантов» движений в двух противоположных направлениях, что можно понимать как генерацию действительных чисел из бинарных структур. Учитывая, что действительные числа образуют классическую модель континуума, которая, в свою очередь, отождествляется с пространством, вырисовывается механизм генерации пространства из дискретных динамических бинарных структур. О такой возможности говорил еще К. Вайцзеккер [1], позднее она стала предметом пристального анализа Ю.С. Владимирова [4] и др.

Разумеется, эти общие соображения должны быть осмыслены и конкретизированы.

Попробуем, следуя названному подходу, обрисовать возможную структуру теории описания процессов микромира.

Начнем с общего замечания.

Действительные числа являются неотъемлемой компонентой любой физической теории. При этом наблюдается двойственность, свойственная и другим числам, в частности натуральным: действительные числа могут быть количественными, для этих чисел справедлива аксиома Кантора; могут быть порядковыми – отражающими структуру потока времени, для этих чисел аксиома Кантора не имеет места. Данная двойственность носит фундаментальный характер и отражает двойственность природы наших представлений о реальности, вложенной в пространство и время.

Естественно предположить, что описание процессов на микроуровне должно исключать любые метрические факторы. Иными словами, на микроуровне допустимыми являются только порядковые числа.

Количественные и порядковые действительные числа, вместе с адекватными их природе алгебраическими операциями, образуют, соответственно, две модели D и W, которые формально изоморфны. С точки зрения ортодоксальной теоретико-множественной методологии это один объект. Однако имеются и существенные отличия, которые в контексте рассматриваемой проблемы носят принципиальный характер.

Прежде всего, это касается проблемы измерения. Физический прибор, с помощью которого проводятся измерения, реализует геометрическую модель действительного числа, в частности, отметка («точка») на шкале измерительного прибора соответствует действительному (строго говоря, рациональному) числу. Иными словами, измерение возможно только в рамках модели *D*. В модели *W* такой возможности нет, и проблема измерения в *W* решается редукцией к модели *D*.

Рассмотрим более внимательно модель *W* как предполагаемый инструмент описания процессов микромира.

Как уже подчеркивалось, действительное число в этой модели – это структура, образованная знаками двух видов, имеющих смысл противоположных направлений.

В этой конструкции есть ряд тонких моментов, которые надо обсудить.

1. Прежде всего, необходимо отметить, что сама идея «направления» приводит к двузначности. Направление может относиться:

– к прямолинейному движению, тогда «направления» – это шаг «вправо» или «влево»;

– к вращательному движению, тогда «направление» – это вращение «по» или «против» часовой стрелки.

Ортодоксальная точка зрения относится к природе направлений индифферентно, для нее важна только структура. Наш подход подчеркивает принципиальную важность этой двузначности. Будем фиксировать ее синтаксически – направления, относящиеся к прямолинейному движению, будем обозначать стрелками ↑(↓), к вращательному движению – знаками ↻ (↺).

При этом необходимо отметить важнейший момент. И прямолинейное движение, и вращение в модели *W* носят абстрактный, ментальный характер и целиком принадлежат нашей интуиции. Только в этом случае будет реализована основополагающая концепция автономии числа от геометрических конструкций и физической реальности. Разумеется, это не исключает соответствующую интерпретацию этих абстракций.

2. Попробуем понять, как названную двузначность отобразить на уровне *D*. Для этого необходимо соотнести со знаками ↑(↓) и ↻ (↺) определенные числа k_1 и k_2. Число γ из *W* определяется исключительно структурой взаимно-противоположных направлений, что исключает позиционность знаков ↑(↓) и ↻(↺) в числе. Это значит, что числа k_1 и k_2 можно соотнести с самим числом γ. Таким образом, одна и та же структура γ определяет в *D* числа $\pm k_1 \cdot \gamma^{-1}$ для знака ↑(↓) и $\pm k_2 \cdot \gamma^{-1}$ для знака ↻(↺), где γ^{-1} – прообраз γ в *D*.

Задача состоит в том, чтобы определить числа k_1 и k_2, что предполагает прояснения семантики знаков ↑(↓) и ↻ (↺).

В отношении знаков ↑(↓) все достаточно просто. Это «кванты» единичной длины линейного процесса. Таким образом, $k_1 = 1(-1)$. Число k_2 определяется сложнее. Этим мы займемся в следующем разделе.

3. Физическая величина, соотнесенная с порядковым числом, то есть структурой, образованной из знаков двух взаимно противоположных направлений, автоматически становится квантованной. В случае знаков ↑(↓) величина этого «кванта» в *D* равна $k_1 = 1(-1)$. Однако в случае «квантов» ↻(↺) число k_2 уже может быть не равным 1. В этом случае появляется реальное квантование.

Разумеется, дело здесь не в обозначении. Ключевым моментом является выяснение сущности объекта ↻(↺) и величины k_2. Это, как уже говорилось, будет осуществлено в следующем разделе.

4. Важным свойством модели *W* является то, что действительные числа – последовательности появляются не одновременно, а в порядке очередности – от более простых последовательностей к более сложным. Это отражает два процесса:

– классическое квантование – дополнение выбранного объекта *X* «квантами»↑(↓) и ↻(↺), что в *D* соответствует увеличению в *D* его прообраза X^{-1} на $k_1 = 1$ или k_2. Этот процесс описывает базовую подструктуру *D* – натуральный ряд;

– движение в глубь структуры действительных чисел. Если речь идет о прямолинейном движении, которое описывается «квантами» ↑(↓), то фактически речь идет о процессе измерения с увеличивающейся точностью. Этот факт виден в *D,* но не в *W,* где все сгенерированные числа равноправны.

5. Переход от *W* к *D* (редукция), в случае ↑(↓), осуществляется естественным путём введения позиционности, то есть зависимости длины стрелки от ее места в числе. Этот способ не приемлем для ↻(↺).

Подведем некоторые итоги.

Приведенная умозрительная конструкция представляет собой схему погружения «внутрь» точки с выходом на порядковые действительные числа. В случае ↑(↓) все сводится к процессу приближения к выбранной точке на прямой, причем с обеих сторон от этой точки. Случай ↻(↺) видится гораздо более содержательным, однако здесь нужна обоснованная интерпретация. Этой интерпретации и вытекающим из нее следствиям посвящены последующие разделы данной работы. Приведем лишь общее направление мыслей.

Знак вращения ↻ из *W* указывает на некое абстрактное вращение, которое не имеет никаких параметров и отражает только идею вращения как таковую.

Для описания структуры γ фундаментальных вращений ↻ в *D* в традициях «Монадологии» Г.В. Лейбница [12] имеются две возможности:

1) «закрытых окон», в этом случае речь идет о числе $k_2\gamma$;

2) «открытых окон»: «заглянув внутрь» ↻ можно увидеть фазу φ, то есть речь идет о линейной функции $k_2\gamma\ \varphi$.

Далее будет показано, что число k_2 – это постоянная Планка $\hbar$. Значит, прообразом в *D* числа ↻ являются число $\hbar$ (при «закрытых окнах) и действие $\hbar\varphi$ (при «открытых окнах»).

Важно подчеркнуть, что знаки ↑(↓) и ↻(↺) указывают на существенно различные объекты. В первом случае – это статический объект, во втором – объект, наделенный внутренним движением, вращением.

Как будет показано ниже, при определенных условиях структуру γ можно понимать как модель элементарной частицы спина (γ) (здесь проявилась особенность *W,* где действительное число полностью определяется структурой двух взаимно противоположных направлений.

Если γ из W понимать как некую динамичную монаду в смысле Г. Лейбница, то возникает соответствие: действие – спин, при этом спин является более фундаментальным понятием. Это соображение, высказанное Ю.И. Маниным, представляется крайне важным.

Опираясь на образы из уже упомянутой «Монадологии» Г. Лейбница, можно сказать, что спин – это полноценная монада, у которой «закрыты все окна», и он представляет собой замкнутый в себе динамический объект. Напротив, действие – это монада, у которой «открыто окно», и мы видим ее движение в непрерывной среде D.

Из всего перечисленного, в рамках данного подхода, вырисовывается следующая методология описания процессов микромира.

Независимо от природы процесса, с ним можно соотнести некоторое действие в D, которое, в свою очередь, соотносится с некоторым «спином» из W. Этот спин может быть как реальным, так и гипотетическим. Изучение структуры многообразия спинов может дать представление о структуре многообразия действий и, следовательно, о самих процессах.

Многообразие спинов W формально изоморфно многообразию действительных чисел (строго говоря, W – более широкое многообразие, кроме действительных чисел включает в себя инфинитоземальные элементы), и, казалось бы, имеет вполне понятную структуру. Однако этот изоморфизм (гомоморфизм) чисто формальный и ряд возникающих задач, например, выявление многообразия спинов (действий), относящихся к одному процессу, требует введения на W специальной топологии. Другим понятием, необходимым для оценки действия, является понятие сложности его двоичного описания, то есть понятие сложности по Колмогорову.

Полнота и точность описания объектов микромира целиком зависит от используемого формализма. Имеющиеся на сегодняшний день формализмы, как гильбертовы пространства, так и фейнмановские интегралы, идейно основаны на теории множеств и, следовательно, воспроизводят ее идеологию. В рамках физической теории это приводит к появлению артефактов, которые бывает трудно отследить и исправить.

Ключевая идея данного подхода состоит в том, чтобы спуститься на самый нижний, базовый уровень абстракции, свободный от последующих идеологических и технических наслоений и рассмотреть проблему в ее «наивной» постановке.

В этом контексте целесообразно вспомнить мысль замечательного физика и философа В.Д. Захарова о том, что в основе физической теории лежат некие структуры, «которые не события (как в геометрической парадигме) и не состояния (как в полевой парадигме), а процессы, то есть динамические структуры (монады). Это отражает интуицию иного типа времени, отличного от геометрического» [8].

Именно такие монады и составляют основу нестандартного формализма, о котором идет речь в данной работе.

2.

Начнем с замечания, что первый «настоящий» формализм квантовой теории сложился достаточно поздно, когда после работ де Бройля стало очевидным, что для описания квантовых феноменов нужна новая абстракция – комплексная амплитуда ψ.

Принцип суперпозиции амплитуд практически однозначно определял для них теоретико-множественную структуру – гильбертово пространство H_∞. Однако возможен иной ход мысли.

Посмотрим еще раз на до де Бройлевскую квантовую механику и попытаемся найти там нужную абстракцию.

Как известно, в 10-х годах XX века процедура квантования опиралась на утверждение, что существует величина $\hbar$ ячейки фазового пространства и для каждой степени свободы периодических одномерных движений возможны лишь состояния, удовлетворяющие условию (правило Бора – Зомерфельда):

$$\oint pdq = \hbar.$$

Данное утверждение традиционно истолковывалось как квантование действия. Однако, как нам представляется, эта формула содержит нечто большее, которое заключается в следующем.

Величина интеграла не зависит от выбора контура, важна только сама идея периодического движения. Эта идея представляется некоторым абстрактным вращением ↻, которое существует только в сознании. Константа $\hbar$ возникает как *следствие существования* такого абстрактного вращения.

Выяснение статуса абстрактного вращения – отдельная и крайне нетривиальная задача [3]. Абстрактный характер вращения, в котором отсутствуют все физические и геометрические характеристики, кроме направления и самого факта вращения, позволяет использовать его при построении порядковых действительных чисел. Таким образом, мы снова приходим к многообразию W, но теперь уже со стороны семантики.

Подобный разворот, безусловно, является определенным вызовом для интуиции. Вращение всегда мыслится в некоторой непрерывной среде, «освободить» его от этой среды и перейти к абстрактному понятию представляется невозможным. Однако анализ фундаментальных математических понятий позволяет увидеть в них следы именно такого «освобождения». Даже в простейшем математическом объекте – натуральном числе, которое имеет очевидное содержание в окружающем мире, заложены две фундаментальные абстракции: ментальный переход к следующему элементу и потенциальная бесконечность, определяемая аксиомой индукции. В этом плане переход от ментального «линейного» перехода к ментальному вращению видится логически оправданным ходом.

В действительности освобождение абстракции от конкретного носителя является фундаментальной методологией образования математических объектов. Когда эти объекты впоследствии возвращаются в физику в виде осязаемых объектов пространства и времени, об их абстрактной основе, как правило, забывают.

Приведем простейший пример.

Пусть нам необходимо сложить 5 башмаков и 7 яблок. Во времена оные эта задача представляла значительные трудности именно благодаря тому, что количество предметов было жестко связано с носителем (это можно увидеть и сейчас в языках некоторых малых народов). Что может быть результатом такого сложения: 12 «башмакояблок» или 12 объектов, представляющих пары (башмаки, яблоки)? Понятно, что усложнение арифметических операций, в таком контексте, приводит к появлению сущностей «сверх меры» (очень схожие проблемы возникают, например, в теории расслоенных пространств).

Решение проблемы, как известно, состоит в отрыве количества от его носителя, образовании абстрактных объектов – чисел и в установлении арифметических операций над числами. Определенную завершенность – понятие натурального числа получило в аксиоматике Пеано.

В данном примере во всех существенных чертах воспроизводится ситуация с вращением. Вращение «привязано» к континууму, и для разрыва этой связки существует только одно препятствие – сложность представления вращения, которое нигде не существует кроме сознания. В действительности ничего экстраординарного в этом нет, поскольку, как уже говорилось, даже в натуральном числе заложен «линейный» процесс, состоящий из отдельных шагов, которые существуют только в сознании. Можно пойти и дальше, каждое действительное число, как было показано выше, можно представить в виде цепочек шагов «вперед» ↑, «назад» ↓. Таким образом, континуум $\mathbb{D}$ (действительные числа) строится на чисто ментальной и процессуальной основе.

Вернемся еще раз к схеме обсуждаемого нестандартного формализма квантовой теории. Его особенностью является построение структур, изоморфных многообразию действительных чисел, но имеющих существенно различную семантику.

Основой формализма являются порядковые действительные числа. «Строительным материалом» в данном случае выступают объекты, имеющие противоположные направления (точнее, знаки этих объектов). Эти объекты выступают «квантами» некоторых процессов. При этом сами объекты могут быть как статическими: ↑(↓), так и включающими в себя внутреннее вращение: ↻(↺).

Визуальная квантованность порядковых чисел из W следующим образом отражается в количественных числах из D, которые не имеют аналогичной визуализации:

$$r = \pm \mathrm{k}_1 \cdot \gamma^{-1} \text{ для знака } \uparrow(\downarrow);$$
$$r = \pm k_2 \cdot \gamma^{-1} \text{ для знака } ↻(↺),$$

где γ^{-1} – прообраз γ структуры из W в D, *а* k_1 *и* k_2 – абсолютные величины соответствующих «квантов». В прообразе γ^{-1} можно учитывать или не учитывать внутреннее вращение ↻(↺) («закрытые» и «открытые окна»). В первом случае – это число, во втором – линейная функция $\gamma^{-1}\varphi$.

Случай ↑(↓) тривиален, $k_1 = 1$.

В случае ↻(↺), $k_2 = \hbar$ и мы имеем в D многообразие чисел $\hbar\gamma^{-1}$ или линейных функций действия $S = \hbar\gamma^{-1}\varphi$. В соответствии с идеей Ю.И. Манина, числа из W будем называть «спинами». В D в этом случае величина спина представляется в единицах постоянной Планка $\hbar$.

Будем записывать эти числа в привычной десятичной записи, но, чтобы отделить их от чисел из D, будем заключать их в круглые скобки. Например, число ↻↺ из W – это (*1/2*).

Общая схема нестандартного формализма квантовой теории изображена на рис. 2 (D, W).

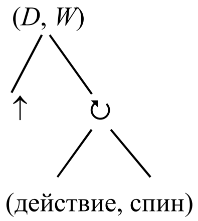

Рис. 2

В данной схеме формализма существует две значительные проблемы, которые требуют отдельной аналитики (она будет осуществлена в других статьях автора из серии «Нестандартный формализм квантовой теории»).

Первая из этих проблем касается строгого статуса абстрактного вращения ↻(↺). Эта фундаментальная проблема, которая непосредственно связана с ключевыми концептами математики: множеством, непрерывностью, бесконечностью. Однако в рамках развиваемого формализма достаточно интуитивного представления об абстрактном вращении ↻(↺) как вращении «нигде».

Вторая проблема – это соотношение двух структурно изоморфных, но существенно различных по семантике многообразий D и W. В рамках нестандартного формализма эти структуры используются как отдельно, так и совместно. В формальном плане соотношение этих структур можно описать системой отображений, что будет сделано ниже, однако это описание не будет полным. Для соотношения D и W важен модельный аспект: одно из многообразий выступает моделью другого.

Важна философская составляющая факта «двух реальностей», отраженных в D и W. В плане прояснения сущности этих реальностей интерес представляют мысли В. Гейзенберга, высказанные им в работе «*Ordnung der Wirklichkeit*» [5].

Введение нового формализма оправдано только в том случае, если он приносит существенные идейные и технические «дивиденды». Попробуем в общих чертах обрисовать их.

Методология применения данного формализма основана на структурном анализе фундаментальных понятий, описывающих физические взаимодействия и процессы: действия и спина. Физические объекты и процессы появляются как носители свойств, полученных на основе такого анализа.

Названные понятия представлены в виде многообразия W процессуальных бинарных структур, изоморфного многообразию действительных чисел. Это позволяет применить для анализа этих структур достаточно мощный аппарат, который в настоящий момент, по большей части, находится вне поля зрения физики: колмогоровская сложность, сюрреальные числа и т.д. Насколько применение этих методов оправдано с точки зрения физики, на данный момент ответить, разумеется, невозможно. Однако в одном аспекте, как представляется, эффект «приращения» заведомо будет. Тот факт, что структура состояний квантового объекта вкладывается в многообразие действительных чисел, говорит о том, что для них реализуется какая-то форма принципа вложенных отрезков. В частности, можно предположить, что появляются некие новые квантовые числа, с помощью которых описывается квантование на более глубоких уровнях.

Полученное в данной работе уточнение формулы В.В. Варламова спектра масс определенного класса частиц является непосредственным следствием названного принципа.

2.1.

Перейдем к конкретной реализации сформулированной программы.

Новую абстракцию ↻, которая будет играть ключевую роль во всем нестандартном формализме, будем называть ***фундаментальным вращением.***

Определим вначале структуру фундаментальных вращений, которую можно было бы соотнести с двухкомпонентным спинором.

Как известно, спинорная структура содержит в себе прообразы всех основных характеристик классического пространства-времени: размерность, сигнатуру, метрику и т. д. Более того, эта структура содержит прообразы всех основных свойств элементарных частиц: спин, массу, заряд. Вместе с тем спиноры тесно связаны с линейным представлением группы вращений n-мерного комплексного аффинного пространства.

Можно перевести понятие спинора в чисто алгебраическую плоскость и трактовать его как элемент минимального левого идеала комплексной алгебры Клиффорда. Это придает ему понятный алгебраический смысл, но еще дальше уводит от интуитивного содержания.

Попытаемся отразить это содержание с помощью фундаментального вращения.

Для этого обратимся к свойствам топологического пространства вращений в R^3. Как известно, каждое такое вращение можно задать осью r с правовинтовой ориентацией и углом $\varphi \in [0, \pi]$. Если направить φ вдоль r, то такое вращение можно задать точкой на замкнутом шаре радиуса π. Это соответствие неоднозначно: вращения на угол π относительно r и $-r$ совпадают. Отождествив противоположные точки шара, получим взаимно однозначное соответствие. Обозначим такой шар через V. В топологическом пространстве существуют два класса гомотопически неэквивалентных контуров, то есть пространство V не односвязно. Основной интерес представляют контуры, которые стягиваются в точку. В R^3 им соответствуют поворот на 4π, который эквивалентен тривиальному движению. Как известно, поворот на 2π таким свойством не обладает.

Наглядно (хотя и не вполне строго) эту ситуацию можно представить следующим образом.

Если вообразить, что произошел некий «коллапс» и от пространства V осталось только два контура, их можно изобразить на плоскости в виде двух касающихся друг друга окружностей (один конур вложен в другой). Переход с одной окружности на другую происходит в точке касания, дает период 4π (рис. 3).

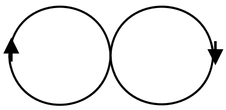

Рис. 3

Следующим шагом естественно перейти к записи через фундаментальные вращения – ↻↺. С точки зрения W – это число (1/2). В D, при «закрытых окнах», – это число $\hbar/2$, что, как известно, соответствует спину электрона. При «открытых окнах» – это функция $\hbar/2\varphi$. Все это можно воспринять как указание на то, что ↻↺ – спинорный объект (прообраз спинора по замечанию Ю.С. Владимирова).

Дальнейшее изложение требует определенных уточнений. Сделаем эти уточнения.

Формально структуру W можно описать так.

Базовые элементы W – фундаментальные вращения ↻,↺. Обозначим через ↻^{k}(↺)^{k} – повторение k раз базового элемента ↻(↺).

Структура W – это конечные или неограниченные последовательности вида:

↻^{p}↺^{q}↻^{g}↺^{t}…

На элементах W определены отношения «раньше – позже» и «больше меньше», а также операция сложения, реализующая принципы «последовательности» и «простоты» (а следовательно, и остальные арифметические операции).

Структура W формально изоморфна множеству действительных чисел D (даже многообразию нестандартных действительных чисел $^*D$) и представляет его процессуальную модель.

Определим отображения из W в D:

f_1 : ↻^{p}↺^{q}↻^{g}↺^{t}… $\rightarrow (\lambda)$;

f_2 : ↻^{p}↺^{q}↻^{g}↺^{t}…$\rightarrow \lambda\hbar$;.

f_3 :↻^{p}↺^{q}↻^{g}↺^{t}… $\rightarrow \lambda\hbar\varphi$, а также из D в W;

f_4: $\lambda\varphi \rightarrow$ ↻^{p}↺^{q}↻^{g}↺^{t}…;

Прокомментируем смысл этих отображений.

Отображение f_1 – это представление структуры ↻^{p}↺^{q}↻^{g}↺^{t}… (действительного числа) в рамках уровня W в привычной форме (по вышеназванной договоренности числа заключаются в круглые скобки). При этом необходимо четко осознавать, что на уровне W есть только структура фундаментальных вращений, и ничего больше.

Отображение f_2 представляет собой структуру ↻^{p}↺^{q}↻^{g}↺^{t}… в виде действительного числа, но уже с точки зрения уровня D. Выше мы называли такое отображение «с закрытыми окнами», отмечая тот факт, что при отображении не было обращения к внутренней динамике структуры ↻^{p}↺^{q}↻^{g}↺^{t}… Важна физическая интерпретация этого отображения. Отображение f_2 присваивает структуре из W число, которое имеет смысл спина. Таким образом, можно предположить, что эти структуры можно отождествить с физическими объектами (частицами), реальными и гипотетическими. Об этом пойдет речь ниже.

Отображение f_3 «открывает окно» и дает полную информацию о структуре ↻^{p}↺^{q}↻^{g}↺^{t}…, включая внутреннюю динамику. Фундаментальное вращение ↻ на этом уровне – это линейная функция фазы φ с коэффициентом $\hbar$, который дает информацию, о том, что абстрактный процесс замкнут на себя, λ – структура этого процесса. В простейшем случае одного фундаментального вращения ↻ эта функция имеет вид $\hbar\varphi$, который естественно отождествить с действием S.

Отображения f_4, вместе с отображением f_3 описывают механизм квантования. Представление фазы в виде фундаментального вращения (отображение f_4) автоматически ведет к ее квантованию (дело здесь, разумеется, не в обозначениях – именно фундаментальное, абстрактное вращение является, как было выяснено выше, причиной появления кванта действия $\hbar$. С другой стороны, именно абстрактный характер вращения позволяет использовать его при конструировании числа).

Замечание. В дальнейшем мы будем активно использовать выражения «с открытыми окнами» и с «закрытыми окнами», которые понимаются в означенном выше смысле. Эта термины, навеянные «Монадологией» Г.В. Лейбница, позволяют достаточно точно и образно разделить интерпретации фундаментальных вращений в D.

Перед тем как перейти к более детальному анализу структуры W, имеет смысл сравнить ее с алгеброй Клиффорда.

Существует несколько определений этой алгебры, пригодных для различных целей. В данном контексте важна ее содержательная сторона, которую можно найти у Р. Пенроуза [14].

Алгебра Клиффорда строится на основе базисных отражений: γ_1, γ_2, …, γ_n, где отражение γ_r означает отражение r-й координатной оси, которая не затрагивает остальные координаты. Для спинорного объекта выполняется соотношение $\gamma_1^2 = -1$, $\gamma_2^2 = -1$,…, $\gamma_n^2 = -1$. Вращение пространства на π есть комбинация двух отражений $\gamma_i\gamma_j$. При этом $\gamma_i\gamma_j = -\gamma_j\gamma_i$. Элементы алгебры Клиффорда – это повороты и отражения, то есть линейные комбинация произведений базисных элементов: γ_1, γ_2, …, γ_n, γ_p, γ_q $(p < q)$, γ_p, γ_q, γ_r $(p < q < r)$, …, γ_1, γ_2, …, γ_n. Размерность этой алгебры равна 2^n.

Если встать на чисто алгебраическую точку зрения, то никаких «спинорных объектов» нет – есть алгебра и ее минимальный левый идеал размерностью $2^{n/2}$, элементы которого и считаются спинорами.

Фундаментальной идеей алгебры Клиффорда является «введение в оборот» развернутой идеи направления (через некоммутативность).

Сравнивая эти две структуры, можно сказать следующее.

Алгебра Клиффорда и структура W построены на различных абстракциях: отражениях пространства R^n в первом случае и фундаментальных вращениях – во втором. С формальной точки зрения алгебра Клиффорда – это ассоциативная алгебра с единицей, а W – действительные числа. При этом идея направления оказывается «зашитой» в саму структуру действительного числа. Этот факт идейно сближает названные структуры, хотя они существенно отличаются по используемому формализму. Существенно то, что алгебра Клиффорда построена на теоретико-множественной основе, в то время как структура W строится на основе фундаментальных вращений, которые выходят за теоретико-множественные рамки.

Тем не менее между этими структурами можно увидеть определенные аналогии. Вращения в пространстве R^n представляются четным числом отражений, но, разумеется, их нельзя рассматривать как абстрактное фундаментальное вращение.

Вместе с тем мысленную проекцию структуры ↻↺ на пространство R^n можно понимать как указание на существование оси симметрии r: ↻ | ↺. Определим отражение γ_r следующим образом γ_r: ↻ | ↺ $\to$ ↺ | ↺, тогда γ_r^2: ↺ | ↺ $\to$ ↺ | ↻ $= -1$.

Таким образом, структура ↻↺ является «спинорным объектом» и в смысле алгебры Клиффорда.

2.2.

Продолжим анализ структуры W.

Рассмотрим амплитуду $e^{i\lambda\varphi}$, это вращение в комплексной плоскости против часовой стрелки единичного радиуса-вектора. Теоретико-множественный носитель не привносит никаких данных о характере вращения, и оно полностью определяется параметром λ. Согласно приведенным выше соотношениям, фазу $\lambda\varphi$ можно собрать из фундаментальных вращений. Формально это означает отображение f_4 из f_4: $R \to W$,

$f_4(\lambda\varphi) =$ ↻^{p}↺^{q}↻^{g}↺^{t}… . При этом очевидно следующее. В отсутствии теоретико-множественного носителя различия между фазой φ и амплитудой $e^{i\varphi}$ стираются – оба этих концепта выражают одну и ту же идею вращения. Формально это выглядит так:

$f_4(e^{i\lambda\varphi}) =$ ↻^{p}↺^{q}↻^{g}↺^{t}… . Иными словами, прообразом функции $e^{i\lambda\varphi}$ становится последовательность фундаментальных вращений, структура которой определяется параметром λ: $e^{i\lambda\varphi} \sim$ ↻^{p}↺^{q}↻^{g}↺^{t}… . Таким образом, отображение f_4 превращает непрерывную функцию $e^{i\lambda\varphi}$ в дискретную структуру *без потери информации*.

Очевидно, что при $\lambda = m/2^n$, где m – целое*, а* n – натуральное число, последовательность фундаментальных вращений конечна. Можно показать, что если λ рациональное число, то неограниченная последовательность фундаментальных вращений с некоторого шага становится периодической.

Факт представления амплитуды $e^{i\lambda\varphi}$ дискретной структурой $\circlearrowright^p\circlearrowleft^q\circlearrowright^g\circlearrowleft^t\ldots$, которая, в свою очередь, содержит в себе константу $\hbar$, имеет далеко идущие следствия как технического, так и идейного плана. Кратко обрисуем эти следствия.

Как известно, квантовая теория возродила идею дискретности, которая традиционно ассоциируется с конечными или счетными множествами. В этом смысле дискретные структуры можно рассматривать как предшествующие непрерывным структурам. Вместе с тем структуры непрерывности являются основной абстракцией классической механики. Переходя к дискретным структурам квантовой теории, осуществляется как бы упрощение абстракции, некий «шаг назад». Так ли это?

Представление непрерывной функции $e^{i\lambda\varphi}$ последовательностью $\circlearrowright^p\circlearrowleft^q\circlearrowright^g\circlearrowleft^t\ldots$ в W позволяет сформулировать два принципиальных тезиса. Дискретные структуры квантовой теории образуются путем трансформации структур непрерывности (механизмы такой трансформации являются предметом отдельного разговора). Образно говоря, дискретность квантовой теории имеет характер не пред-, а постнепрерывности.

Последовательность $\circlearrowright^p\circlearrowleft^q\circlearrowright^g\circlearrowleft^t\ldots$ можно рассматривать как образ в W комплексного числа $e^{i\lambda\varphi}$ (этот факт также требует специального обсуждения). Также названная структура содержит в себе идею квантования действия (фазы) и саму постоянную Планка $\hbar$. Можно сделать вывод, что идея квантования действия содержится в самой экспоненциальной форме комплексного числа, с единичным модулем. Это парадоксальная связь совершенно не просматривается на уровне D, но становится очевидной на уровне W.

2.3.

Опираясь на интерпретацию в D фундаментального вращения $\circlearrowright$ как кванта действия $\hbar$ (при «закрытых окнах»), можно строить различные структуры – конечные или неограниченные последовательности фундаментальных вращений. Эти последовательности являются действительными числами, которым можно придать смысл величины характеристики квантового объекта в единицах действия. Сам же квантовый объект может быть как реальным, так и виртуальным. Структура фундаментальных вращений задает определенные свойства этого объекта. Если ограничиться конечными структурами фундаментальных вращений, то им будут соответствовать двоично-рациональные числа $m/2^n$. Это позволяет соотнести $W_{Fin} \subset W$ с многообразием спинов (опять-таки, реальных или виртуальных).

Попытаемся дать возможную интерпретацию конечным структурам фундаментальных вращений. Руководящим принципом здесь будет принцип «двуделения», сформулированный В. Паули и активно обсуждаемый В. Гейзенбергом. Его идея состояла в том, что на глубинном уровне имеют смысл только две сущности: энергия и симметрии. Не менее, а возможно и более глубокую сущность квантового мира отражают понятия спина и связанного с ним действия. При этом принцип симметрии, несомненно, применим и в этом случае.

Принцип двуделения состоит в том, чтобы представить имеющиеся симметрии в виде групповой редукции, суть которой состоит в следующем. Если имеется цепочка вложенных подгрупп группы G_0: $G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_m$, где подгруппа G_{i+1} является нормальным делителем группы G_i и неприводимое унитарное представление T группы G_0, то редукция G_0/G_1 представления T группы G_0 по подгруппе G_1 приводит к разложению T на неприводимые представления G_1 и т. д. В этой конструкции легко узнается композиционный ряд Э. Галуа, впервые примененный для описания симметрий алгебраических уравнений.

Реализация идеи симметрии, зафиксированной в принципе двуделения в отношении объектов, построенных из фундаментальных вращений, оказывается более простой, чем в случае непрерывных групп Ли.

В этом плане наибольший интерес представляет структура ↻↺ как простейшая из симметричных структур. Ассоциированное с этой структурой число $1/2\hbar$ имеет размерность действия. Однако симметрия, как известно, может быть обратной стороной экстремума. В этой связи можно предположить, что именно симметрия выделяет среди структур фундаментальных вращений ту, которую можно наделить статусом реальности. Проверкой этой гипотезы может явиться факт вывода уравнения движения в R из структуры фундаментальных вращений в W_{Fin}. В этом случае реализуется каноническая методология: от экстремума действия к уравнению.

Такое уравнение действительно можно найти.

Воспользуемся для этого конструкцией А.П. Ефремова [7], возникшей в совершенно ином контексте, но содержащей общую идею, которая применима и в данной ситуации. В самых общих чертах конструкция А.П. Ефремова выглядит так.

Рассмотрим вращение в плоскости q_1, q_2 вокруг q_3, где направление, определяемое вектором q_3, совпадает с направлением оси вращения. Представляя $q3$ матрицей Паули и применяя спектральную теорему, получим: $q_3 = i\,(\psi^+\varphi^+ - \psi^-\varphi^-)$, где ψ^+ и ψ^- базис некой предгеометрической поверхности, φ^+ φ^- – дуальный базис. Очевидно, в этом случае $1 = \psi^+\varphi^+ + \psi^-\varphi^-$. Следуя А.П. Ефремову, запишем комплексное число z в виде

$$z = x \cdot 1 + y \cdot q_3 = x\,(\psi^+\varphi^+ + \psi^-\varphi^-) + iy\,(\psi^+\varphi^+ - \psi^-\varphi^-).$$

Путем несложных преобразований получим $z = \alpha \cdot e^{i\beta} C^+ + \alpha \cdot \mathrm{e}^{-i\beta} C^-$, где C^+ и C^- – проекторы на две взаимно перпендикулярные комплексные плоскости.

Данную конструкцию можно наглядно представить в виде «конической передачи» (рис. 4).

Вращение этой «передачи» на угол φ дает вращение плоскости q_1, q_2 на угол 2φ вокруг q_3, то есть мы имеем дело со спинорным объектом.

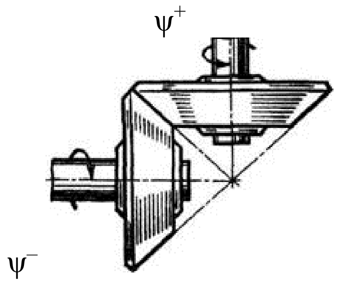

Рис. 4

Рассмотрим конформное преобразование предгеометрического базиса: $\psi'^{\pm} = \sigma e^{\pm i\alpha}\psi^{\pm}$, $f'^{\pm} = \sigma e^{\mp i\alpha}\mathrm{f}^{\pm}$, которое сводится к повороту «конической передачи» на угол φ и ее растяжение в σ раз. Если поворот является допустимым преобразованием, то растяжение приводит к дефекту умножения в ассоциативной алгебре кватернионов. С другой стороны, такая возможность априори существует и ее необходимо нивелировать. Предложенный А.П. Ефремовым способ такого нивелирования приводит к математической форме уравнения Шредингера:

$$\left[\partial_\theta - \frac{i}{2}\left(\partial_\Lambda\partial_\Lambda - 2W\right)\right]\lambda = 0,$$

где W – произвольная функция в D.

Если посмотреть на структуру ↻↺, то можно увидеть, что она обладает тем же свойством, что и названные «шестерни», – она вращается, но не растягивается (вращение в отсутствии среды в принципе не может быть «растянуто»). Это значит, что структура ↻↺, помещенная в некую среду, в частности D, без всяких дополнительных условий позволяет сгенерировать уравнение Шредингера.

В оригинальной работе А.П. Ефремова появление уравнения Шредингера (и других уравнений) связано с идеей «спасения» умножения ассоциативных алгебр, когда элементы этих алгебр выражаются через геометрические структуры, которые, в свою очередь, могут преобразовываться, нарушая алгебраические операции в этих алгебрах. При этом появление уравнений выглядит достаточно загадочным. Прояснение связи конструкции А.П. Ефремова со структурой ↻↺ проясняет одновременно и всю ситуацию. С одной стороны, структура последовательностей фундаментальных вращений в $W_{Fin} \subset W$ отражает структуру действия (на уровне D такая структура не видна – это просто действительное число). С другой стороны, структура ↻↺ минимальная симметричная структура, что в D проявляется как экстремум (разумеется, это надо доказать, но доказательство достаточное естественное и простое). В этой ситуации логично, что экстремум действия ведет к появлению уравнения. Таким образом, оригинальная конструкция А.П. Ефремова ложится в хорошо понятный физический контекст.

Структура ↻↺ является простейшей структурой, обладающей внутренней симметрией (в данном контексте будем понимать эту симметрию на интуитивном уровне). Из этой структуры можно строить более сложные структуры, также обладающие внутренней симметрией. Генерацию этих структур можно представить в виде простейшей системы аксиом, которая может выглядеть так:

1. ↺ = (1/2) · ↻.

2. ↻$^{-1} = \hbar$ (имеется в виду отображение $D \to W$).

3. (↻↺)$^{-1} \to E\psi = \hat{H}\psi$, где функция ψ соответствует фундаментальному вращению ↻.

Первая аксиома отражает в смешанной форме числовые соотношения в $W_{Fin} \subset W$, вытекающие из правил Конвея. Как было оговорено выше, если структуры в W представляются в привычной десятичной записи, то они берутся в круглые скобки. Аксиому 1 можно записать в следующей форме: $\sqrt{}$ ↻ = ↻↺. Здесь возможна интересная интерпретация. Как было показано выше, ↻ разрешает вращение в комплексной плоскости, определяемое комплексным числом в экспоненциальной форме. Извлечение квадратного корня из комплексного числа ведет к появлению римановой поверхности с двумя листами и вращениями, переходящими с листа на лист. Именно это и показывает приведенная выше формула.

Вторая и третья аксиомы фиксируют инварианты, которые возникают при «погружении» структуры фундаментальных вращений в D (третья аксиома опирается на идеи А.П. Ефремова генерации уравнения Шредингера из ↻↺).

Снова рассмотрим структуру ↻↺. Можно предположить, что эта структура соответствует фермиону, а ½ – это его спин. Заменяя в аксиоме *1* и *3* ↻ на ↻↺, можно видеть, что структура ↻↺↺↻ определяет уравнение Шредингера, в свою очередь определяющее динамику ↻↺, которое является «квадратным корнем» из уравнения Шредингера, определяющим динамику ↻: ↻↺↺↻ = $\sqrt{}$ ↻↺. Поскольку в обоих этих случаях речь идет об уравнениях, имеющих первую производную по времени, то структура ↻↺↺↻ определяет уравнение Дирака, а не Клейна–Гордона. Структуру ↻↺ в данном контексте можно отождествить с электроном, при этом речь идет, безусловно, о свободном электроне. В данном формализме поле подсоединяется путем введения следующей топологии: базис открытых множеств образуют продолжения всех множеств, принадлежащих W_{Fin}. Можно ввести функцию, непрерывную в смысле описанной топологии, которую можно интерпретировать как характеристику поля. Важным моментом является тот факт, что данная топология укладывается в процессуальную идеологию, реализуемую в W. Подобную топологию и ее приложение к построению модели квантового эффекта Холла планируется подробно обсудить в дальнейшем.

В данной конструкции, несмотря на ее необычную форму, отражена понятная для физики логика: спин – действие – уравнение. Формализм, основанный на фундаментальных вращениях, предельно лаконичен и явление синонимии, когда разные вещи выражаются одними и теми же конструкциями, неизбежно (структура ↻↺ тому пример). Однако подобная лаконичность позволяет увидеть общность вещей, которые разделены теоретико-множественным формализмом. В целом лаконичность языка компенсируется исключительно сильной абстракцией фундаментального вращения ↻ (которая требует отдельного обсуждения).

Вернемся к фундаментальному вращению ↻↺↺↻ = $\sqrt{}$ ↻↺.

Теоретически приведенного соотношения достаточно, чтобы в пространстве-времени записать уравнение Дирака, например, в виде 4-х сцепленных уравнений. Попробуем, однако, получить информацию о динамике свободного электрона ↻↺, оставаясь в рамках *W*.

Рассмотрим структуру ↻↺↺↻. Для удобства пронумеруем входящие в него фундаментальные вращения: $↻_1↺_2↺_3↻_4$. Идея заключается в том, чтобы, чтобы «открывать» и «закрывать окна» не во всей этой структуре, а только ее части. Это дает следующий эффект.

Согласно аксиоме *3*, фундаментальные вращения *1* и *2* определяют два уравнения Шредингера для ψ и ψ^* соответственно, то есть с $E > 0$ и $E < 0$. Оставшуюся структуру, определяемую фундаментальными вращениями *3* и *4,* будем интерпретировать как структуру с «закрытыми окнами», то есть как спин½. Аналогичные рассуждения можно применить к вращениям *3* и *4*. В целом ситуация выглядит так:

$E > 0$, спин = $-1/2$;
$E < 0$, спин = $-1/2$;
$E > 0$, спин = $1/2$;
$E > 0$, спин = $1/2$.

Для того чтобы осуществить вычисления, необходимо перейти на уровень *D*, однако уровень *W* также оказывается достаточно информативным.

Попробуем применить накопленные представления о многообразии *W* к осмыслению одной из ключевых проблем теоретической физики – описанию спектра материи. Поскольку подход к решению этой задачи будет чисто математическим, его следует рассматривать не более, чем «протокол о намерениях». Тем не менее имеет смысл зафиксировать ряд идей, которые при дальнейшей обработке могут привести к желаемому результату.

Будем придерживаться точки зрения В. Гейзенберга, что имеет место спектр материи и элементарная частица представляет собой тот или иной энергетический уровень этого спектра. Все уровни этого спектра равноправны, и может идти речь о некоторой универсальной константе – «кванте масс». Таким образом, массу «частицы» можно представить в виде $m = k_m \cdot N\ (n,\ \tilde{n},\ \ldots)$, где k_m – «квант масс», N – функция с целочисленными аргументами, которая характеризует «частицу». Займемся выяснением числовых значений величины k_m и вида функции N.

Структура ↻↺ имеет спин ½, и ее динамика определяется уравнением Дирака. Как уже говорилось, эту структуру в данном контексте можно отождествить с электроном, следовательно, одной из характеристик ↻↺ будет масса электрона m_e.

Как уже отмечалось, структуру ↻↺ можно рассматривать как прообраз спинора. Как утверждают многие авторы (Р. Пенроуз, Ю.С. Владимиров, В.В. Варламов и др.), именно двухкомпонентный спинор является «строительным кирпичом», из которого строятся более сложные структуры. В частности, В.В. Варламовым была развита модель двухуровневой реальности, в которой ключевую роль играли спинорные структуры, построенные путем тензорного произведения бикватернионных алгебр C_2 и C_2^*. В целом его модель выглядит следующим образом.

Первый уровень реальности – это сепарабельное гильбертово пространство H_∞ (картина Шредингера), в рамках которой определены наблюдаемые – C^* – алгебры и симметрии. Основной наблюдаемой является оператор *энергия* H, основные симметрии задаются группой Лоренца $SO_0(1,3)$, что, естественно, подразумевает наличие пространства-времени.

Второй уровень – несепарабельное гильбертово пространство состояний $H^S \otimes H^Q \otimes H_\infty$ (картина Гейзенберга), сконструированное из неприводимых конечномерных представлений спинорной группы $SL(2, C)$. Эти представления определены в собственных подпространствах $H_E \subset H_\infty$ оператора энергии H. Векторы состояния в $H^S \otimes H^Q \otimes H_\infty$ задают спиновые и зарядовые степени свободы элементарной частицы.

В рамках этого подхода возникает формула спектра масс: $m = m_e\,(l+1/2)(\acute{l}+1/2)$, где l и $\acute{l}$ – целые или полуцелые числа, $|\,l - \acute{l}\,| = s$, спин частицы.

2.4.

Определим основные линии развития подхода, при котором спинорные структуры строятся на основе парного фундаментального вращения ↻↺. Это позволит определить число k_m и функцию N.

Согласно постулату Ю. Вигнера элементарная «частица» ассоциируется с неприводимым конечномерным унитарным представлением группы Пуанкаре (в данном случае достаточно рассмотреть представление связного компонента группы Лоренца $SO_0\,(1,3)$).

Дальнейшие рассуждения таковы.

Как известно, существует гомоморфизм из $SL(2, C)$ в $SO_0\,(1,3)$. С другой стороны, $SL(2, C)$ локально изоморфна $SU(2) \otimes SU(2)$ и $SU(2)$ дважды накрывает $SO(3)$. Таким образом, конечномерные представления группы Лоренца можно сконструировать из конечномерных неприводимых представлений $SO(3)$, которые, как известно, определяют спектр целых и полуцелых чисел (речь, разумеется, идет об уровне D).

Как будет показано ниже, этот спектр можно построить на основе фундаментальных вращений. При этом спектр *из* $W_{Fin} \subset W$ оказывается более широким. Это связано с тем, что W изоморфно множеству действительных чисел, в котором действует принцип вложенных отрезков, позволяющих перейти к более глубоким слоям микромира.

Перейдем к конкретным выкладкам.

Рассмотрим неприводимые представления группы вращения $SO(3)$ и попытаемся реализовать их в новых абстракциях.

Обозначим через g вращение в R^3. Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 – координаты вектора, направленного вдоль оси вращения, длина которого равна углу поворота, тогда $g = g(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$.

Обозначим через T_g элемент конечномерного непереводимого представления $SO(3)$, соответствующий элементу $g \in SO(3)$. Таким образом, будет определена функция $T(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$.

Как представляется, функцию T можно представить в виде унитарной матрицы. Пусть I_1, I_2, I_3 – инфинитоземальные операторы в линейной части разложения $T(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ по формуле Тейлора. Справедливы соотношения $[I_1, I_2] = I_3$, $[I_2, I_3] = I_1$, $[I_3, I_1] = I_2$. Данные операторы можно рассматривать как генераторы алгебры Ли $SO(3)$. Функция $T(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ определяется через I_1, I_2, I_3 следующим образом: $T(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = e^{I_1\xi_1 + I_2\xi_2 + I_3\xi_3}$. Далее, введем генераторы $J_i = iI_i$, которые являются эрмитовыми матрицами, а функция $T(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = e^{i(J_1\xi_1 + J_2\xi_2 + J_3\xi_3)}$ – унитарным преобразованием. Следующим шагом определяются матрицы $H_+ = J_1 + iJ_2$ и $H_- = J_1 - iJ_2$, $H_3 = J_3$, для которых справедливы соотношения: $[H_3, H_+] = H_+$, $[H_3, H_-] = -H_-$, при этом $H_+ = H_-$. Матрицы H_+, H_-, H_3 записываются в ортогональном базисе, состоящем из нормированных собственных векторов H_3 формулами:

$$H_+ f_m = \alpha_{m+1} f_{m+1};$$
$$H_- f_m = \alpha_{m-1} f_{m-1};$$
$$H_3 f_m = m f_m,$$

где $m = -l, l+1, l+2, \ldots, l-1, l$, а l – целое или полуцелое число и $\alpha_m = \sqrt{(l+m)(l-m+1)}$.

Таким образом, число l полностью определяет конечномерное неприводимое представление группы $SO(3)$.

Как известно, оператор энергии коммутирует с генераторами J_1, J_2, J_3. Если опустить все промежуточные этапы, идея представления группы (то есть некоторых симметрий) состоит в присваивании этой группе конечного или бесконечного набора целых или полуцелых чисел, которые интерпретируются как спектр состояний квантового объекта.

Посмотрим, как можно подойти к решению этой задачи в рамках структуры W.

Выше подчеркивалось, что амплитуда $e^{i\lambda\varphi}$ в структуре W представляется последовательностью фундаментальных вращений $\circlearrowright^p \circlearrowleft^q \circlearrowright^g \circlearrowleft^t \ldots$. Сравним это представление с унитарным преобразованием $e^{i(J_1\xi_1 + J_2\xi_2 + J_3\xi_3)}$, которые определяются матрицами $J_i = iI_i$, где I_i, – инфинитоземальные вращения в R^3. Таким образом, фундаментальное вращение можно рассматривать как абстрактный аналог инфинитоземальных вращений, в R^3, которые определяют представления группы $SO(3)$.

Заметим, что число λ в амплитуде $e^{i\lambda\varphi}$, определяемое последовательностью ↻^{p}↺^{q}↻^{g}↺^{t}… фундаментальных вращений, является собственным значением оператора J_3.

Иными словами, спектр – l, l+1, l+2, …, l–1, l строится из собственных значений оператора H_3, который является комплексной оболочкой инфинитоземального вращения I_3. Таким образом, с помощью описанной выше конструкции инфинитоземальные вращения трансформируются в спектр состояний, получение которого и является главной целью всего построения. В рамках $W_{Fin} \subset W$ аналогичный спектр строится из самих фундаментальных вращений, без каких-либо промежуточных агентов. Приведем схему построения этого спектра.

Построение спектра в $W_{Fin} \subset W$ осуществляется по следующей схеме.

В группе SO(3) существует два класса гомотопически не эквивалентных контуров, с периодом 2π и 4π, которые полностью характеризуют топологические свойства SO(3). Сопоставим контуру с периодом 2π фундаментальное вращение ↻, а контуру с периодом 4π – фундаментальное вращение ↻↺. Выше было отмечено, что число l, которое определяет конечномерное неприводимое представление группы SO(3), может быть целым и полуцелым. Это совпадет с числами (1) и (1/2), характеризующими контуры ↻ и ↻↺. Такое совпадение, разумеется, не является случайным.

Основным для нас будет фундаментальное вращение ↻↺, поскольку именно оно определяет группу SU(2), участвующую в представлении группы Лоренца.

При построении спинорного объекта из парных фундаментальных вращений ↻↺ будем придерживаться принципа двуделения – максимально сохранять его симметрию.

Построение осуществляется по шагам.

На *четном* шаге к фундаментальному вращению ↻↺ слева добавляется такое же парное фундаментальное вращение.

На *нечетном* шаге к фундаментальному вращению ↻↺ справа добавляется противоположное парное фундаментальное вращение, после чего может добавляться парное фундаментальное вращение любого направления (рис. 5).

(↻↺)(↺↻)(↻↺)…

…(↻↺)(↻↺)(↻↺) ← (↻↺)(↻↺) ← **(↻↺)** → (↻↺)(↺↻) → ***(1/2^3)***

(↻↺)(↺↻)(↺↻)…

(*3/2*) (*1*) (*½*) (*1/2^2*) (*3/2^3*)

четные шаги нечетные шаги

Рис. 5

Смысл данной схемы заключается в том, чтобы выделить некую базовую структуру X (соответственно, действительное число в данном случае это ↻↺ и 1/2) и, далее, описать процессы:

– увеличения/уменьшения числа X на «1»/«–1» (в данном случае единица равна 1/2);

– добавления к X чисел вида $(m/2^n)$, где m и n – целые числа.

В первом случае мы имеем традиционную схему квантования, то есть увеличение на (1), которое в B становится увеличением на $\hbar$ (при «закрытых окнах»). Во втором случае происходит «тонкая настройка» традиционной схемы с помощью двоично-рациональных чисел. Именно этот, второй случай и представляет наибольший интерес, поскольку расширяет традиционную схему квантования.

Построенные структуры интерпретируются в W как спины, а в D – как кванты действия (при «закрытых окнах») или как линейные функции действий (при «открытых окнах).

Полученные структуры в W строятся на основе парных фундаментальных вращений и представляют собой спинорные структуры. Среди них выделяются структуры, обладающие внутренней симметрией, которую можно связать с экстремумом действия. Используя конструкцию А.П. Ефремова, можно получить соответствующее уравнение. Принцип симметрии может быть заменен более тонкими критериями, также позволяющими прийти к экстремуму действия. Одним из таких критериев является выделение простейших подструктур, на основе которых можно по алгоритму восстановить всю структуру. Это, по существу, совпадает с понятием сложности по Колмогорову. Связь данных понятий отмечал Ю.И. Манин [13], который высказал много глубоких идей, относящихся к фундаментальной физике.

Схема, представленная на рис. 5, позволяет определить число k_m и функцию N. Очевидно, что k_m можно соотнести с массой электрона m_e. Относительно функции N, то из приведенной выше конструкции следует, для фундаментального вращения ↻↺ число сгенерированных структур определяется формулой $(l+k/2^m)$, где l – целое или полуцелое число, k и m – целые. Это число, как было подчеркнуто выше, можно соотнести с числом неприводимых представлений группы $SU(2)$. Учитывая, что $SL(2, C)$ локально изоморфна $SU(2) \otimes SU(2)$, число N определяется формулой

$$N = (l + k/2^m)(\acute{l} + s/2^t),$$

где l и $\acute{l}$ – целые или полуцелые числа, k, m, s, t – целые числа. Соответственно, формула спектра масс выглядит следующим образом:

$$m = m_e(l + k/2^m)(\acute{l} + s/2^t).$$

Если положить k, m, s, t равными 1, то данная формула совпадает с формулой Варламова. Появление чисел k, m, s, t, как уже говорилось, обусловлено изоморфизмом многообразия фундаментальных вращений многообразию действительных чисел, в которых действует принцип вложенных отрезков, позволяющий рассмотреть более мелкие шаги квантования.

Приведенные выше рассуждения, касающиеся спектра масс, нужно рассматривать как некоторую математическую «разминку» (в ряде моментов не вполне строгую), которая может оказаться полезной при решении этой фундаментальной проблемы физики. Основная цель названной «разминки» – продемонстрировать возможности нестандартного формализма, который может быть использован при решении и других задач.

Заключение

Нестандартный формализм, начала которого были рассмотрены в настоящей статье, в первого взгляда «ортогонален» всей сложившейся традиции описания явлений микромира. Посмотрим, однако, на всю ситуацию более внимательно.

Начнем с самого термина «нестандартный». Основная абстракция, которая явилась основой этого формализма двойственная – это и объект – число, и в определенной мере алгебраический объект, поскольку имеет конкретную структуру. Одновременно этот объект наделен внутренними процессами, которые активно участвуют в алгебраической «жизни» этого объекта. Подобными качествами (но далеко не в такой степени) наделены бесконечно малые числа в «нестандартном (инфинитоземальном) анализе. При этом речь идет только об аналогии, а не о применении идеологии в технике инфинитоземального анализа в квантовой теории.

Целесообразность «введения в оборот» этого формализма обусловлена тем обстоятельством, что теоретико-множественный формализм, который служит идейным и техническим базисом квантовой теории, в настоящее время достиг в этой области очевидного потолка. Многие предлагаемые им конструкции чрезвычайно сложны и вряд ли имеют отношение к физической реальности. В этом случае начинает работать «бритва Оккама» и переход к новым абстракциям становится неизбежным. Работа этой «бритвы», как представляется, состоит в следующем.

Фундаментальными концептами в корпусе квантовой теории являются: «состояние», выраженное волновой функцией», «некоммутативность» (операторов и вообще переменных), различные симметрии и ряд других понятий. При этом необходимо учитывать тот факт, что эти концепты – суть модели в теоретико-множественных структурах и что за этими моделями могут стоять более фундаментальные представления [11].

Так, за волновой функцией можно увидеть идею некоторого абстрактного вращения, за некоммутативностью – идею направления. Концепция нестандартного формализма состоит в том, чтобы уйти от теоретико-множественных абстракций и сопутствующих им артефактов, найдя способ корректно ввести интуитивно ясные объекты, выражающие эти идеи. Строго говоря, эта же мысль была заложена в упоминавшуюся концепцию нестандартного анализа.

В целом же представленный нестандартный формализм допускает развитие в различных направлениях.

Литература

1. *Weizsäcker C. F.* Aufbau der Physik. München, 1985. 661 s.
2. *Варламов В. В.* Спектр материи Гейзенберга в абстрактно-алгебраическом подходе // Математические структуры и моделирование. 2016. № 3 (39). С. 5–23.
3. *Векшенов С. А.* От теории множеств к теории двойственности // Метафизика. 2019. № 4 (34). С. 35-43.
4. *Владимиров Ю. С.* Метафизика. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2002. 550 с.
5. *Heisenberg W.* Ordnung der Wirklichkeit. München. Manuskript № 1942.
6. *Dedekind R.* Was sind und was sollen die Zahlen? 1. Auflage, Vieweg, Braunschweig, 1888. 79 s.
7. *Ефремов А. П.* Предгеометрическая структура ассоциативных алгебр и кватернионные пространства как математическая среда обитания физических законов // Пространство-время и фундаментальные взаимодействия. 2014. Вып. 1. С. 5-19.
8. *Захаров В. Д.* Пространство и время в современной космологии (аспект бесконечности) // Современная космология: философские горизонты / под ред. В. В. Казютинского. М.: Канон+ РООИ «Реабилитация», 2011. С. 412.
9. *Кириллов А. А.* Что такое число? М.: Физматлит, 1993.
10. *Кнут Д.* Сюрреальные числа. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. 110 с.
11. *Connes A.* Geometry and the Quantum. 2017. URL: arXiv:1703.02470v1 [hep-th]
12. *Лейбниц Г. В.* Сочинения: в 4 т. Серия: Философское наследие. Т. 1: Метафизика. «Монадология». М.: Мысль, 1982. 636 с. (Серия: Философское наследие).
13. *Manin Y. I.* Renormalisation and computation I: motivation and background. 2009. URL: arXiv: 0904.4921v2[math.QA]
14. *Пенроуз Р.* Путь к реальности, или Законы, управляющие Вселенной. М.: Регулярная и хаотическая динамика, 2007. 912 с.

“NON-STANDARD” FORMALISM OF QUANTUM THEORY I: MASS SPECTRUM

S.A. Vekshenov

Russian Academy of Education
8 Pogodinskaya St, Moscow, 119121, Russian Federation

Abstract. In quantum theory, there are both point and integral objects. In this case, the computational technique is based exclusively on set-theoretic structures associated with the point model of the continuum. The transition to integral dynamic structures makes it possible to develop new methods that allow us to obtain useful results, in particular, to derive the formula for the spectrum of a certain class of particles: $m = me(l + k/2^m)(\acute{l} + s/2^t)$. This formula is a generalization of the formula obtained by V.V. Varlamov in 2017. In general, such an approach is consonant with the concept of the so-called. “non-standard analysis”, in which “number-monads” play a key role.

Keywords: set-theoretic structures, algebraic objects, fundamental rotations, duality, spin, masses of microparticles