DOI: 10.22363/2224-7580-2023-4-60-66
EDN: VZBJNW

ДЕЙСТВИТЕЛЬНО ЛИ ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ «ОБРЕЧЕНО»?*

П. Войт

Колумбийский университет, Нью-Йорк, США

Перевод с английского ***А.А. Сидоровой-Бирюковой****

Аннотация. В последнее время среди физиков-теоретиков стало уже почти общепринятым мнение о том, что «пространство-время обречено». Подобная точка зрения сформировалась в связи с проблемами создания квантовой теории гравитации и осознанием того факта, что фундаментальная теория должна быть основана на чем-то совершенно отличном от обычных представлений о пространственно-временной геометрии. Но что именно следует понимать под этой «обреченной» геометрией? Мы рассмотрим, как эволюционировали представления о четырехмерной геометрии со времен Эйнштейна и как возник новый взгляд на геометрию, который, возможно, отменяет этот приговор.

1. Геометрия в терминах метрики

Геометрия в традиционной формулировке, использованной Эйнштейном при создании общей теории относительности (ОТО), восходит к Риману. Хорошее современное описание этой теории можно найти, например, в [7]. Ее основные элементы таковы:

– Четырехмерное многообразие M, описываемое в терминах координатных карт, которые образуют покрытие M областями $U_j \subset M$ и задают отображения

$$\varphi_j : U_j \rightarrow \mathbf{R}^4.$$

Многообразие M обычно считается гладким ($\varphi_k(\varphi_j^{-1})$ и принадлежит C^∞, в области определения.

– Тензорные поля, которые при $m \in M$ принимают значения в тензорном произведении нескольких копий касательного (T_mM) или кокасательного (T_m^*M) к M пространств. При наличии координатных карт эти значения становятся функциями с некоторым количеством верхних и нижних индексов.

– Метрическое тензорное поле g принимает значения в симметричном подпространстве пространства $T_m^*M \otimes T_m^*M$ и имеет сигнатуру (3, 1).

Метрический тензор определяет связность (Леви-Чивиты), а уравнения Эйнштейна записываются в терминах кривизны этой связности (риманова

---

* *Источник*: URL: https://arxiv.org/abs/2204.02225v1, опубликовано 06.04.2022.

** E-mail: asidorova@mail.ru

кривизна) и тензора энергии-импульса. Уравнения Эйнштейна можно получить как уравнения Эйлера – Лагранжа для действия Эйнштейна – Гильберта, которое задается интегралом скалярной кривизны.

Данные, используемые для описания этой геометрии, сильно избыточны из-за свободы выбора координатных карт. В гамильтоновом формализме, где начальные данные задаются метрикой на трехмерной гиперповерхности и ее производной по времени, конфигурационное пространство 6-мерно (метрика имеет 6 координат). Инвариантность относительно диффеоморфизмов подразумевает свободный выбор координат в каждом из четырех измерений и, следовательно, накладывает четыре ограничения, поэтому остается две физические степени свободы.

2. Геометрия в терминах расслоений реперов со связностью

Вскоре после открытия Эйнштейном ОТО Картан высказал альтернативную точку зрения. Его геометрия, позже сформулированная на языке главных расслоений, хорошо описана в [5]. Здесь геометрия описывается следующими компонентами:

– расслоение OF(M) ортонормированных реперов: 10-мерное главное $SO(3, 1)$-расслоение над 4-мерным пространством-временем;

– спиновая связность: 1-форма ω на $OF(M)$, принимающая значения в алгебре Ли $SO(3, 1)$;

– тетрада: 1-форма e на $OF(M)$, принимающая значения в $\mathbf{R}^4$.

Записывая действие Эйнштейна – Гильберта в терминах e, ω и кривизны Ω, получаем действие

$$\int_M \epsilon_{ABCD} e^A \wedge e^B \wedge \Omega^{CD}(\omega). \tag{1}$$

Вариация по ω дает уравнение движения с нулевым кручением (имеет единственное решение для ω в терминах e, называемое связностью Леви-Чивиты). Вариация по e дает уравнения Эйнштейна.

Используя эти переменные в гамильтоновом формализме, получаем конфигурационное пространство ортонормированных реперов на трехмерной гиперповерхности, которое является 9-мерным. В дополнение к четырем ограничениям, вытекающим из инвариантности относительно диффеоморфизмов, есть еще три, фиксирующие свободу поворота реперов на элемент $SO(3)$, в результате снова имеем 9 – 7 = 2 физические степени свободы.

В итоге получаются те же уравнения поля, но формулировка Картана имеет два важных преимущества:

1) позволяет описать не только тензорные, но и спинорные поля, если взять спиновое двойное покрытие $OF(M)$, которое имеет слой $SL(2, \mathbf{C})$, а не $SO(3, 1)$:

2) позволяет на том же языке формулировать калибровочную теорию, взяв произвольную группу Ли G и, главное, G-расслоение над M с произвольной связностью A, которая является 1-формой со значениями в алгебре Ли

группы G. При этом квадрат нормы кривизны A задает действие Янга – Миллса, а не Эйнштейна – Гильберта.

Первое преимущество важно, поскольку реальные поля материи являются спинорными полями, а второе – в связи с тем, что в конечном итоге нам хотелось бы иметь единую структуру для описания ОТО и Стандартной модели.

3. Расслоения реперов со связностью в четырех измерениях

Метрический формализм и формализм Картана тетрад/связности можно использовать для единообразного описания геометрии в любом числе измерении. Однако в четырех измерениях формализм тетрад/связности имеет особенности, связанные с тем, что $*$-оператор Ходжа переводит 2-формы в 2-формы. Этот оператор удовлетворяет условию $*^2 = 1$ для евклидовой сигнатуры, поэтому пространство два-форм можно разбить на самодуальные ($* = 1$) и антисамодуальные ($* = -1$) подпространства. Отсюда следует, что алгебра Ли группы вращений не является простой, а разлагается следующим образом:

$$\mathfrak{so}(4) = \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3) = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2).$$

В сигнатуре Минковского $*^2 = -1$, поэтому такое разложение требует комплексификации алгебры Ли, чтобы получить собственные пространства с собственными значениями $\pm\, i$, что дает

$$\mathfrak{so}(3,1) \otimes \mathbf{C} = \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C}).$$

Примечательно, что для описания ОТО в четырех измерениях достаточно использовать только половину переменных связности, необходимых в пространствах с другим числом измерений (см., например, [6]). При использовании только самодуальной компоненты для вычисления кривизны в действии (по формуле (1)) получаются те же уравнения Эйнштейна и правильное число степеней свободы. Это очевидно для рассмотрения в евклидовом пространстве[1], тогда как в пространстве Минковского нужно перейти к комплексификации (удваивая число степеней свободы), чтобы выделить самодуальную компоненту, после чего наложить ограничение в виде условия вещественности.

Введение переменных Аштекара [2] позволяет реализовать такое разложение в фазовом пространстве и дает отправную точку для развития альтернативных методов квантования, таких как петлевая квантовая гравитация. В пространстве Минковского необходимость работать с комплексными связностями, накладывая затем условия вещественности, приводит к значительным трудностям, которые еще предстоит преодолеть.

[1] Здесь и далее под «пространством» понимается пространство с определенной сигнатурой (*прим. пер.*).

4. Геометрия твисторов

Еще более удивительная особенность, характерная для четырехмерного пространства-времени, известна благодаря Роджеру Пенроузу [8], который предложил рассматривать точки пространства-времени как двумерные комплексные подпространства пространства $\mathbf{C}^4$, называемого твисторным пространством. Взяв все такие подпространства, получим не просто пространство-время Минковского, а комплексифицированное и конформно компактифицированное пространство-время Минковского. В терминах обычной тензорной геометрии описание спинорных полей невозможно, тогда как в формализме Картана такая возможность есть, но описание получается довольно сложным и искусственным. Напротив, в рамках твисторной теории киральные спиноры являются тривиальными объектами: двумерное киральное спинорное пространство в точке есть не что иное, как сама точка.

Еще одним существенным преимуществом твисторных пространств является то, что в них конформная симметрия имеет простое описание. Группа $SL(4, \mathbf{C})$, линейно действующая на твисторном пространстве, является комплексификацией конформной группы.

Характерная особенность твисторной геометрии состоит в том, что она наиболее просто описывает не евклидово пространство-время или пространство-время Минковского, а нечто, что является одновременно комплексификацией того и другого. Это позволяет ясно понять, как перейти от евклидова пространства к пространству Минковского путем аналитического продолжения. Конформные группы $Spin(5, 1)$ (евклидова и $Spin(4, 2)$ (Минковского) являются различными вещественными формами комплексной конформной группы $SL(4, \mathbf{C}) = Spin(6, \mathbf{C})$. В качестве подгрупп у них имеются вещественные формы $Spin(4) = SU(2) \times SU(2)$ и $Spin(3, 1) = SL(2, \mathbf{C})$ группы $Spin(4, \mathbf{C})$.

5. Евклидова квантовая теория поля

Попытки сформулировать квантовые теории поля (КТП) в пространстве-времени Минковского встречают множество серьезных математических трудностей. Даже в простейшем случае свободных КТП двухточечная функция не является обыкновенной функцией; ее можно определить как гиперфункцию, для этого нужно перейти к комплексифицированному пространству-времени, а затем взять граничные значения голоморфных функций. Вместе с тем в евклидовом пространстве-времени та же двухточечная функция свободного поля ведет себя хорошо и может быть строго определена через континуальные интегралы (подробнее см., например, [4]). Как известно, единственное непертурбативное определение теории Янга – Миллса выполнено именно в евклидовом пространстве-времени. Разумно предположить, что все фундаментальные физические теории должны строиться в евклидовом пространстве-времени, тогда как пространственно-временные амплитуды в пространстве Минковского можно восстановить, взяв граничные значения аналитических продолжений из евклидова пространства-времени.

В то время как амплитуды можно продолжить аналитически, для евклидовых полей этого сделать нельзя. Дело в том, что эти поля значительно отличаются от полей в пространстве Минковского: они всегда «off-shell» и не удовлетворяют никаким уравнениям движения. И хотя существует формализм евклидова пространства Фока, это совсем не то же самое, что формализм физического пространства Фока, который описывает многочастичные системы. Еще одно отличие евклидовой КТП от КТП Минковского состоит в том, что необходимо нарушить вращательную инвариантность $SO(4)$ и выбрать конкретное направление мнимого времени. Только после того, как это сделано, можно определить физические состояния и аналитическое продолжение в пространство-время Минковского.

6. Евклидовы твисторы и объединение

В недавней работе [10] описана спекулятивная конструкция, в которой с помощью аппарата твисторов и КТП в евклидовом пространстве удалось объединить элементы теории гравитации в описанной выше киральной формулировке со степенями свободы Стандартной модели. В этой конструкции связность для одного из множителей $SU(2)$ в $Spin(4)$ обеспечивает киральную спиновую связность для гравитации, другой множитель $SU(2)$ играет роль внутренней симметрии, обеспечивающей калибровочные поля слабых взаимодействий. Поле Хиггса, которое спонтанно нарушает эту вторую симметрию $SU(2)$, необходимо для нарушения вращательной инвариантности $SO(4)$ и появления выделенного направления мнимого времени. Хотя многое еще предстоит сделать, чтобы превратить эту систему в полноценную теорию со строго определенной динамикой, все степени свободы и симметрии единой теории находятся на своих местах, в рамках какой-то новой, ранее не изученной структуры.

Выводы

Фундаментальные переменные Стандартной модели являются геометрическими, а действующие силы описываются в терминах связности и кривизны. Часто предполагается, что Стандартная модель – всего лишь эффективная низкоэнергетическая теория, но с учетом динамики Янга – Миллса квантовая теория оказывается непротиворечивой на сколь угодно малых расстояниях (для калибровочной теории $U(1)$ потенциальные проблемы возникают только на масштабах меньше планковского). Нет оснований полагать, что геометрия связности/кривизны/спиноров Стандартной модели «обречена» оказаться неприменимой в малом масштабе. Не менее важно и то, что не существует теоретической базы, которая предлагала бы взамен геометрии связности/кривизны/спиноров нечто принципиально другое в малом масштабе.

Тесная связь математических структур четырехмерной геометрии с геометрией связности/кривизны/спиноров Стандартной модели указывает на то, что любая попытка отказаться от этих структур в пользу чего-то совершенно другого столкнется с непреодолимыми трудностями. Вряд ли альтернативной теории удастся унифицировать и воспроизвести успехи Стандартной модели. Мы утверждаем, что четырехмерная геометрия (в формулировке, где главную роль играют евклидова сигнатура, спиноры и твисторы) дает все необходимые степени свободы и симметрии для теории, объединяющей гравитацию в пространстве-времени и известную физику элементарных частиц. Уже получена правильная кинематика, остается проблема с динамикой. Теория Янга – Миллса показывает, что непротиворечивая динамика калибровочных полей на коротких расстояниях действительно существует, а твисторные переменные обеспечивают естественный способ получения конформной инвариантности в таких масштабах. Возможно, последовательную динамическую теорию на малых расстояниях удастся найти, рассматривая киральную формулировку гравитации в рамках твисторного пространства и выбирая в качестве фундаментального евклидово пространство с выделенным направлением мнимого времени. Вероятнее всего, «обреченным» на коротких расстояниях является не геометрия пространства-времени, а только действие Эйнштейна – Гильберта, которое оказывается лишь эффективным приближением на больших масштабах.

Литература

1. *Arkani-Hamed N.* Space-time is doomed, in “Messenger Lectures”, series of talks given at Cornell University, Cornell, 2010. URL: https://www.cornell.edu/video/nima-arkani-hamed-spacetime-is-doomed
2. *Ashtekar A.* New Variables for Classical and Quantum Gravity // Phys. Rev. Lett. 1986. 57. P. 2244–2247.
3. *Gross D.* Einstein and the Quest for a Unified Theory, in Einstein for the 21st Century: His Legacy in Science, Art, and Modern Culture / ed. by Galison P. L., Holton G., and Schweber S. S. Princeton University Press, 2008. P. 287–297.
4. *Jaffe A.* Quantum theory and relativity // Contemporary Mathematics. 2008. 449. P. 209-245.
5. *Kobayashi S., Nomizu K.* Foundations of Differential Geometry. Vol. 1. Interscience Publishers, 1963.
6. *Krasnov K.* Formulations of General Relativity: Gravity, Spinors and Differential Forms. Cambridge University Press, 2020.
7. *Misner Charles W., Thorne K. S., Wheeler J. A.* Gravitation. W. H. Freeman, 1973.
8. *Penrose R.* Twistor Algebra // Journal of Mathematical Physics 1967. 8.2. P. 345–366.
9. *Witten E.* Reflections on the Fate of Spacetime // Physics Today. 1996. 49.4. P. 24–30.
10. *Woit P.* Euclidean Twistor Unification // 2021. arXiv: 2104.05099 [hep-th].

IS SPACE-TIME REALLY DOOMED?

P. Woit

Columbia University, New York, NY 10027, USA

Translated by ***A.A. Sidorova-Biryukova*** *

Abstract. For many years now it has become conventional for theorists to argue that “space-time is doomed”, with the difficulties in finding a quantum theory of gravity implying the necessity of basing a fundamental theory on something quite different than usual notions of space-time geometry. But what is this space-time geometry that is doomed? In this essay we’ll explore how our understanding of four-dimensional geometry has evolved since Einstein, leading to new ideas about such geometry which may not be doomed at all.

* E-mail: asidorova@mail.ru