ПРОБЛЕМЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПАРАДИГМЫ

DOI: 10.22363/2224-7580-2023-4-87-100
EDN: XDOGGB

О ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ КАРТИНЕ МИРА В СВЕТЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ОНТОЛОГИИ ХАЙДЕГГЕРА

Л.Г. Антипенко*

Институт философии РАН
Российская Федерация, 109240, Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1

Я беру на себя смелость утверждать, что было легче остановить солнце, что легче было двинуть землю, чем уменьшить сумму углов в треугольнике, свести параллели к схождению и раздвинуть перпендикуляры к прямой на расхождения.

Проф. В.Ф. Коган о геометрии Лобачевского[1]

Аннотация. До недавних пор существовала одна неразгаданная загадка в отношении логики, которой следовал Лобачевский при создании своей неевклидовой (гиперболической) геометрии. В данной статье показывается, что такая логика неявно у него присутствует и она совпадает с уже сформированной теперь логикой, получившей название комплементарно-диалектической логики. Логика эта проистекает из фундаментальной онтологии Хайдеггера. В области геометрической дисциплины мысли комплементарно-диалектическая логика позволяет объединить исторический и логический аспекты генезиса геометрии Лобачевского. Позволяет понять, как и почему появляются на гиперболической прямой мнимые точки, как они связаны с бесконечно удалёнными точками и т. п. Поскольку комплементарно-диалектическая логика присуща не только геометрии Лобачевского, но и всем другим

* E-mail: chistrod@yandex.ru

[1] Лобачевского часто сравнивают с Коперником и с Колумбом, называют гением первого ранга. В ответ на это проф. В.Ф. Каган и вынес данное суждение. (Взято из его речи, опубликованной в книге: Празднование Казанским университетом столетия неевклидовой геометрии Н И. Лобачевского. Казань, 1927. С. 60–61).

научным дисциплинам, а также философии, это даёт возможность построения геометрической картины мира как части общей научной картины.

Ключевые слова: геометрия, движение, время, фундаментальная онтология, научно-философская картина мира

Приступая к задаче построения геометрической картины мира, мы полагаем, что такая картина может быть создана на основании закономерностей неевклидовой геометрии Лобачевского и научно оправдана в той же мере, как сама эта Геометрия. Но для выполнения данной задачи надо выяснить её логическую структуру, определить логику, которая позволила бы получить геометрическую дисциплину мысли, имеющую философское значение.

Наши отечественные математики: В.Ф. Коган, А.П. Котельников, А.П. Норден, В.В. Степанов, Н.Г. Чеботарёв, П.А Широков, И.Г. Петровский и др. – проделали огромную работу по разъяснению научной значимости геометрии Лобачевского. После Великой Отечественной войны ими было подготовлено к изданию и выпущено в свет пятитомное собрание его сочинений [1]. Некоторыми из них были написаны превосходные вузовские учебники, среди которых выделяется своим совершенством в методическом плане «Высшая геометрия» Н.В. Ефимова [2]. Однако до сих пор логические основания, на которых зиждится неевклидова геометрическая дисциплина мысли, не установлены или не известны математическому сообществу.

Так, скажем, как среди наших, так и среди зарубежных исследователей геометрической проблематики много внимания уделяется истории разных попыток вывести V постулат Евклида о параллельных линиях из других постулатов евклидовой геометрии, из того их перечня, который принято называть *абсолютной геометрией* (поиски Саккери, Лежандра и других геометров). История эта сама по себе очень поучительна, но она не привела к единству *исторического* и *логического* аспектов в геометрии.

Часто профессиональные логики выделяют в теории параллельных следующий момент. V постулат Евклида утверждает, что через точку, лежащую вне данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной. Дальше ставится вопрос: что получится, если этот постулат заменить его отрицанием? Если такая замена не приведёт к логическому противоречию в рамках всех остальных аксиом и постулатов Евклида, в рамках *абсолютной геометрии*, то это будет свидетельствовать о том, что V постулат не зависит от абсолютной геометрии. Всё это правильно, но эта тривиальная истина ничего не говорит о том, как понимать отрицание этого постулата. Обычно отрицание наполняют следующим содержанием: через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести, по крайней мере, две прямые, не пересекающиеся с исходной при любом их продолжении. Но из данного суждения вовсе нельзя составить представления о гиперболической параллели Лобачевского. Поэтому встаёт задача установить логику, в которой операция отрицания даёт возможность получить полноту истины в результате такого отрицания. Следуя философской традиции, будем называть его *диалектическим отрицанием*.

Основания такой логики мы находим в фундаментальной онтологии Мартина Хайдеггера (1889−1976). Операцию диалектического отрицания, при наличии её точного определения, Хайдеггер называет *привацией* [3. С. 86]. А логика, оформленная в рамках хайдеггеровской онтологии, названа нами *комплементарно-диалектической* логикой [4]. Её отправным началом служит идея времени, идея движения. А поскольку предметом геометрии Лобачевского (он называл её Воображаемой, а затем Общей геометрией) являются свойства пространственно-временного движения, то в этом обстоятельстве мы находим логическую связь между данной геометрией и фундаментальной онтологией, что и позволяет ввести концепцию геометрической картины мира. Напомним, что сам Лобачевский о сущности созданной им геометрии писал так: «В природе мы познаём собственно только движение, без которого чувственные впечатления невозможны. Итак, все прочие понятия, например Геометрические, произведены нашим умом искусственно, будучи взяты в свойствах движения; а потому пространство, само собой, отдельно, для нас не существует» [1, т. II. С. 158–159]. У Хайдеггера мысль движется от времени к движению, у Лобачевского − от движения к времени.

Известны два подхода к обоснованию Общей геометрии, которая в контексте проективной геометрии называется *гиперболической*, в отличие от геометрии *параболической* (геометрии Евклида) и геометрии *эллиптической* (геометрии Римана). Один из этих подходов *топологический*, другой − *проективно-геометрический*, то есть связанный с проективной геометрией. Мы очертим кратко эти подходы, покажем, в какой мере они раскрывают существо дела, а затем попытаемся восполнить их недостаточность, обращаясь к теории и логике параллельных прямых.

В статье «О началах геометрии», изданной в 1829 году, Лобачевский утверждал:

«Между свойствами, общими всем телам, одно должно назваться *Геометрическим*, – прикосновение. Словами нельзя совершенно передать того, что мы под этим разумеем: понятие приобретено чувствами, преимущественно зрением, и сами-то чувствами мы его постигаем. Прикосновение составляет отличительное свойство тел: ни в силах или времени и нигде в природе более его не находим. Отвлекая все прочие свойства, телу дают название – *Геометрического*.

Прикосновение соединяет два тела в одно. Так все тела представляют частью одного – *пространства»* [1, т. I. С. 187].

Комментаторы статьи Лобачевского (1835) «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных», откуда взята данная цитата, отмечают, что Лобачевский сделал первую в истории математических наук попытку исходить в построении геометрии от топологических свойств тел. Исходными понятиями у автора «Новых начал», указывают Б.Л. Лаптев, А.П. Норден, А.Н. Хованский, являются *трёхмерное тело* (фактически гомеоморфное шару) и разделение тела *сечением* (гомеоморфным плоскому сечению шара) на две части или составление из двух тел, при наличии их *соприкосновения,* одного тела. «Понятия *поверхность, линия* и *точка* определяются у Лобачевского в терминах сечений и прикосновений тел.

Двум точкам отнесено *расстояние* как инвариант движений…» [1, т. II. С. 465].

Отсюда − представление о точечных многообразиях в геометрии и топологический подход к истолкованию Геометрии. Но в чём его достоинства и недостатки? Определять расстояние как инвариант движения есть смысл только в том случае, если указывается поверхность, по которой совершается движение. А в пространстве Лобачевского сосуществуют три типа поверхностей, каждая из которых определяется своей внутренней геометрией. К ним относятся:

1) орициклическая, или предельная, поверхность с законами евклидовой, параболической, геометрии;

2) эквидистантная поверхность (вместе с плоскостью Лобачевского), на которой реализуется гиперболическая геометрия;

3) шаровая поверхность, на которой реализуется сферическая геометрия.

Каждая из них удовлетворяет свойству свободной подвижности, то есть она может двигаться по самой себе, располагая тремя степенями свободы (вместе с вращением) без деформаций. Каждой из этих поверхностей формально соответствует своё специфичное трёхмерное пространство. Но когда геометрическую аксиоматику пытаются построить, исходя из точечных многообразий – точка, линия, поверхность, пространство, – можно прийти к ряду математически ложных умозаключений.

Дело в том, что три вида пространства: одномерное, двухмерное, трёхмерное, взятые как точечные многообразия, не являются топологически эквивалентными. Этот математический факт был в двадцатом столетии доказан, о чём свидетельствует, например, книга В. Гуревича и Г. Волмэна «Теория размерностей» [5]. Но, кажется, до сих пор в истории топологических исследований не отмечен другой факт, что имеет место топологическая неэквивалентность отрезков прямых, взятых из геометрии параболической и геометрии гиперболической. Здесь будет уместно изложить несколько топологических положений, чтобы оценить значение данного факта в вопросе создания Геометрии Лобачевского.

До появления теории множеств, пишут авторы «Теории размерностей», понятие размерности употреблялось в довольно неопределённом смысле. Конфигурация называлась n-мерной, если наименьшее число параметров, необходимых для того, чтобы описать расположение её точек, было равно n. «Опасность и противоречивость такого подхода сделались ясными после двух знаменитых открытий конца XIX века: канторовского взаимно-однозначного соответствия между точками линии и точками плоскости и пеановского непрерывного отображения отрезка на квадрат. Первое разрушило чувство, что плоскость богаче точками, нежели линия, и показало, что размерность может изменяться при взаимно однозначных отображениях. Второе противоречило убеждению, что размерность может быть определена как наименьшее число непрерывных действительных параметров, требуемых для того, чтобы описать пространство, и показало, что размерность может возрастать при однозначных непрерывных отображениях» [5. С. 23]. (Высказывание о наличии пеановского непрерывного отображения отрезка на квадрат здесь неверно, что следует из дальнейших высказываний самих авторов.)

Вообще выявление топологических свойств геометрических объектов начинается с того момента, когда замечают, что есть нечто общее, скажем, у окружности и квадрата, в то время как, например, прямая или сфера отклоняются от этой общности. Тот факт, что не существует топологической инвариантности между евклидовыми пространствами, обладающими разными числами измерений n и m ($n \neq m$), был доказан Брауэром в 1911–1913 годах. Если бы существовало взаимно-однозначное и непрерывное отображение, скажем, геометрического отрезка на квадрат, то класс топологических отображений, как указывают авторы вышеупомянутой книги, оказался бы слишком широким и не мог бы иметь какого-либо реального применения в геометрии [5. С. 23]. (Здесь говорится о том, что не существует взаимно-однозначного и непрерывного отображения геометрического отрезка на квадрат, что противоречит их предшествующим высказываниям в отношении открытия Пеано. В открытии Пеано речь идёт о том, что непрерывная кривая в смысле Жордана целиком заполняет весь квадрат, проходя через все его точки. Но это вовсе не означает, что отрезок прямой можно непрерывно, от точки к точке, преобразовать в квадрат.)

Мы ставим вопрос, почему не существует взаимно-однозначного и непрерывного отображения параболической прямой линии на гиперболическую прямую, но топология не даёт на него ответа. Ответ отчасти проясняется при втором, проективно-геометрическом, подходе к истолкованию неевклидовой геометрии. Этот подход требует знакомства с проективной геометрией и с её такими понятиями, как «идеальные» точки, прямые и плоскости. Весь арсенал этих понятий очень наглядно и с соблюдением канонов математической строгости изложен в книге Р. Куранта и Г. Роббинса «Что такое математика?» [6], к которой мы отсылаем читателя. Проективная геометрия определяется как группа проективных преобразований геометрических фигур, при которых сохраняются их определённые свойства. Проективным преобразованием называется всякое отображение одной фигуры на другую, получающееся посредством проектирования, центрального или параллельного, или же посредством конечной последовательности таких проектирований [6. С. 194].

Далее говорится о том, что обыкновенная геометрия точек и прямых весьма осложнена тем обстоятельством, что две параллельные прямые не имеют точки пересечения. Это побудило геометров сделать одно примечательное упрощение в её структуре путём расширения понятия геометрической точки, которое вбирает в себя и обыкновенную и «идеальную» точку. Последнюю можно представить так, что если прямая, пересекающая другую прямую, медленно вращается, приближаясь к положению параллельности, то точка пересечения двух прямых неограниченно удаляется, что даёт повод утверждать, что две параллельные прямые пересекаются в бесконечно удалённой точке [6. С. 207]. Итак, пишут авторы, *мы уславливаемся в том,* *что к обыкновенным точкам всякой прямой, добавляем ещё одну, «идеальную» точку и будем считать эту точку принадлежащей всем прямым, параллельным данной, и никаким другим.* «Следствием такого условия является то, что всякая пара прямых на плоскости теперь уже пересекается в единственной точке: если прямые не параллельны, то в „обыкновенной “ точке; если параллельны, то в им обеим принадлежащей „идеальной“ точке. По причинам интуитивного порядка эта идеальная точка на прямой называется *бесконечно удалённой точкой* на этой прямой» [6. С. 208].

То обстоятельство, согласно которому множество бесконечно удалённых точек на плоскости (в проективной геометрии) образует бесконечно удалённую прямую, натолкнул Ф. Клейна на мысль, что бесконечно удалённую прямую можно было бы присоединить к обыкновенной прямой, чтобы получить (определить) геодезическую линию на плоскости Лобачевского. «Гиперболическая геометрия, − писал он, − наделяет прямую двумя бесконечно удалёнными точками. О том, существует ли по ту сторону ещё один участок прямой, дополняющий до замкнутой линии участок, лежащий в конечной области, сказать ничего нельзя, так как наши движения никогда не доводят нас до бесконечно удалённых точек, не говоря уже о том, чтобы выйти за их пределы. Во всяком случае, можно присоединить такой участок как мысленную, идеальную часть прямой линии» [7. С. 268]. Это суждение Клейна никак себя не оправдало, но «идеальные» точки, введённые в геометрию посредством проективных преобразований, сыграли важную роль в выяснении логических оснований Воображаемой Геометрии.

В логическом плане ближайшим аналогом «идеальной» точки в математике является пустой класс (пустое множество) в теории множеств. Суждение «пустой класс существует» означает, что он подводится под квантор существования в исчислении предикатов. Но что значит утверждение о существовании класса, который не содержит ни одного элемента? Пустой класс служит показателем того, что теория множеств «испытывает» недостачу, в ней недостаёт тех элементов (математических объектов), которые не суть единичные подмножества какого бы то ни было выделенного множества. Логический смысл этой недостачи раскрывается посредством привации Хайдеггера, которая гласит: «Если мы нечто отрицаем так, что не просто исключаем, а, скорее, фиксируем в смысле недостачи, то такое отрицание называют *привацией* (*Privation*) [3. С. 86]. Под этим углом зрения мы видим, что геометрическая дисциплина мысли указывает на неполноту (недостачу) точечного многообразия в Евклидовой геометрии и показателем этой недостачи служат «идеальные» точки.

В Геометрии Лобачевского неполнота точечного континуума восполняется мнимыми точками, то есть точками, нумеруемыми мнимыми (комплексными) числами. Покажем, как появляются эти точки. Для этого выпишем два уравнения, определяющие взаимоотношения между сторонами и углами треугольника на сферической поверхности и на плоскости Лобачевского. Первое уравнение имеет вид:

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + \sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cos\alpha\,, \tag{А}$$

где b и c − стороны треугольника, содержащие угол α , a − сторона, лежащая напротив этого угла, R − радиус сферы.

Второе уравнение представлено по аналогии с первым в виде

$$ch\frac{a}{R} = ch\frac{b}{R}ch\frac{c}{R} - sh\frac{b}{R}sh\frac{c}{R}\cos\alpha\,. \tag{Б}$$

Уравнение (Б) получается из (А) путём замены R на iR с тем дополнительным условием, что R приравнивается определенной линейной величине k_L, которую назовём константой Лобачевского (о её значении будет сказано ниже).

По аналогии с тригонометрической формулой (А), реализующейся на сфере, принято поверхность, на которой реализуется тригонометрическая формула (Б), называть сферой мнимого радиуса или псевдосферой [4. С. 192]. Особенность псевдосферы состоит в том, что на ней соприкасаются две точки – мнимая и вещественная. Мнимая точка есть конечная точка мнимого радиуса iR, вещественная точка есть точка, принадлежащая геодезической линии на псевдосфере. Плоскость Лобачевского можно было бы представить как двустороннюю поверхность в том смысле, что с одной стороны она усеяна вещественными точками, а с противоположной стороны − мнимыми точками. И такое представление было бы правильным, если бы не происходило постоянного взаимопревращения точек вещественных в точки мнимые и обратно [2. С. 83−84]. Однако самая трудно постижимая загадка Неевклидовой геометрии заключается в вопросе о том, как мнимые числа проникли в геометрический континуум, если геометрическая практика и теория линейных измерений оперирует образом линейных отрезков, составленных из вещественных точек и чисел.

Ответ на этот вопрос сводится к тому, что ввести мнимые числа в геометрический континуум позволяет как раз константа Лобачевского k_L. Действительно, мы можем выразить длину отрезка l геодезической линии в виде отношения l/k_L , а затем, умножая данное отношение на мнимую единицу i , получить тем самым множество мнимых точек в дополнение к множеству вещественных точек. Такой результат имеет место быть. Но при этом возникает дополнительный вопрос: откуда пришла идея привнести в структуру геометрии эту размерную константу? По-разному она высвечивается у Н.И. Лобачевского и К. Гаусса, который близко подошёл к открытию Лобачевского, хотя и не решился опубликовать свои результаты.

Чтобы увидеть суть расхождений, посмотрим, как выглядят у обоих авторов методологические установки в данном отношении. В конфиденциальном письме Гаусса к Тауринусу, написанном 8 ноября 1824 года, высказаны следующие суждения: «Предложения этой геометрии отчасти кажутся парадоксальными и непривычному человеку даже несуразными; но при строгом и спокойном размышлении оказывается, что они не содержат ничего невозможного. Так, например, все три угла треугольника можно сделать сколь угодно малыми, если только взять достаточно большие стороны; площадь же треугольника не может превысить, даже не может достичь некоторого предела, как бы велики ни были его стороны. Все мои старания найти в неевклидовой геометрии противоречие или непоследовательность остались бесплодными, и единственно, что в этой системе противится нашему разуму, это то, что в пространстве, если бы эта система была справедлива, должна была бы существовать некоторая сама по себе определённая (хотя нам неизвестная) линейная величина» (цит. по [1, т. I. С. 164]).

Как видно, Гаусс ограничил круг своего геометрического видения исключительно свойствами пространства, тогда как Лобачевский видел в своей геометрии наличие *пространственного движения.* Но что значит выражение пространственного движения в геометрии? Всякое движение сопровождается ходом времени, нет движения вне времени. Движение есть там, где есть расход времени, трата времени. Вместе с тем движение есть процесс изменения, а по свойствам процесса изменения мы можем, в свою очередь, судить о свойствах времени. Эти свойства, если они отражаются в геометрии, должны быть столь же универсальными геометрическими свойствами, как и свойства пространства. В гиперболической геометрии механизм изменения сводится к превращению вещественных точек в мнимые, мнимых – в вещественные. При этом вещественная точка превращается в мнимую точку либо со знаком плюс, либо со знаком минус. И как только для каждого из этих актов устанавливается вероятностная оценка, появляется представление о направлении течения времени, поскольку открывается возможность судить о том, какого типа события являются более вероятными, выпадают чаще других, превалируют.

Есть некоторая разница, при наличии сходства, между геометрической картиной мира, рисуемой в рамках Геометрии Лобачевского, и геометрической картиной мира, нарисованной в «Предгеометрии» Ю.С. Владимирова [8]. В «Предгеометрии» вещественные точки берутся как исходные сущности, на которые накладываются определённые отношения, заимствуемые из алгебры матриц и определителей. В Геометрии Лобачевского вещественная (действительная) точка есть результат стягивающихся отрезков. Изложим кратко содержание данного определения, заимствуя его из работы [5]. Рассматривается на числовой оси некоторая последовательность отрезков $I_1, I_2, I_3, ..., I_n, ...$ с рациональными концами при условии, что каждый следующий отрезок содержится в предыдущем и что длина *n*-го отрезка I_n стремится к нулю при неограниченном возрастании *n.* Такая последовательность вложенных друг в друга отрезков и носит название *стягивающих отрезков.* После этого даётся следующая формулировка, которую Курант и Роббинс рассматривают как основной геометрический постулат: «…*какова бы ни была последовательность стягивающих отрезков, существует одна и только одна точка числовой оси, которая одновременно содержится во всех отрезках.* <…> Эта точка, по определению, и называется *действительным числом*;

если она не является рациональной, то называется *иррациональным числом*» [6. С. 94–95].

В гиперболической геометрии можно было бы ограничиться таким определением вещественной точки, если бы не надо было вводить в геометрический универсум мнимые (комплексные) числа. Поэтому и вводится в её структуру абсолютная единица длина.

Теперь нам надо ещё уточнить различие между понятием идеальной бесконечно удалённой точки в проективной геометрии и понятием бесконечно удалённой точкой у Лобачевского. В отличие от бесконечно удалённой (идеальной) точки в проективной геометрии бесконечно удалённая точка в гиперболической геометрии есть *предельная* точка. Чтобы понять, что содержит в себе данный *предел*, вернёмся опять к исходной позиции в построении структуры гиперболической геометрии. Состоит она в том, что на геометрической плоскости через точку a, не лежащую на прямой A, можно провести множество M прямых, которые разделяются на два класса таких, что одни из них пересекают прямую A, другие не пересекают. Это зависит от угла параллельности, который в евклидовой геометрии имеет постоянное значение и равен прямому углу. Постулируя существование этих классов, Лобачевский должен был указать ту грань, ту предельную линию, которая отделяет один класс от другого. Нужно было установить, существует ли такая предельная линия, и если существует, то к какому классу она принадлежит. Ясно, что во множестве пересекающих исходную линию прямых последнюю линию найти невозможно, поскольку нет последней точки, где прямые пересекаются. Поэтому автор постулировал, что предельная линия, разделяющая два класса, принадлежит верхнему классу. Её он и назвал *параллельной*, с углом параллельности $\alpha < \pi / 2$ (в пределе этот угол равен $\pi / 2$).

И вот при последующем исследовании этого постулата математики встали перед вопросом, чем он обусловлен. Одни из них оставили его без внимания, другие объяснили неверно, а третьи поверили ошибочному истолкованию, не вдаваясь в суть вопроса. К примеру, В.Ф. Каган, рассматривая четыре квадранта (I и III, II и IV), в которых располагаются все линии, проведенные через точку, не лежащую на исходной прямой, оправдывал оный постулат, ссылаясь на дедекиндово сечение. «Это разбиение, − писал он, − приводит, таким образом, к дедекиндову сечению пучка прямых, проходящих в I и III квадрантах. Ввиду непрерывности прямой и связанной с этим непрерывности пучка прямых должна существовать прямая, которая это сечение производит; это значит, что должна существовать либо последняя прямая первой категории (последняя встречающаяся прямая), либо первая прямая второй категории (первая не встречающаяся прямая). Но легко себе уяснить, что последней встречающей быть не может…» [9. С. 163]. На этом негативном утверждении он и остановился.

Решение же данного вопроса заключается в том, что предельная прямая (параллель Лобачевского) *встречается* с исходной прямой, но встречается в бесконечно удалённой точке. Наличие двух параллелей, располагаемых с правой и с левой стороны квадрантов, соответствует тому, что прямая наделяется двумя бесконечно удалёнными точками. Эти «концы» прямой соединяются посредством множества мнимых точек. Возможность введения мнимых точек, как уже было сказано выше, реализуется постольку, поскольку гиперболическая геометрия оперирует константой k_L. То обстоятельство, что сумма углов (всякого) треугольника в гиперболической геометрии меньше двух прямых, а площадь треугольника ограничена, невзирая на величину его сторон, обусловлено наличием данной константы. С ней связаны свойства тригонометрических функций, таких как гиперболические синус и косинус.

Итак, мы видим, что при создании проективной геометрии евклидова геометрия приобрела внутри себя замкнутый порядок благодаря введению идеальных точек. Но эти же точки стали символами её неполноты, недостачи. Неполнота заключается в том, что идеальные точки не маркируются числами. Этот недостаток и был восполнен в Геометрии Лобачевского, где на место идеальных безымянных точек были поставлены мнимые точки. Нечто подобное мы находим в теоремах неполноты Гёделя, где устанавливается рекурсивный порядок облечённых в формулы свойств целых положительных чисел, после чего доказывается, что имеются свойства и соответствующие им неиндуктивные числа, выпадающие за рамки этого порядка [10. С. 31]. То же самое мы видим при определении иррациональных чисел, располагаемых на числовой оси среди чисел рациональных, посредством дедекиндовых сечений [6. С. 97-98]. Все такого рода варианты несут на себе печать Хайдеггеровской привации, которая определяется следующим высказыванием: «Если мы нечто отрицаем так, что не просто исключаем, а, скорее, фиксируем в смысле недостачи, то такое отрицание называют *привацией* (*Privtion*) [3. С. 86].

Опишем теперь предельно кратко основные положения фундаментальной онтологии Хайдеггера и содержащуюся в ней логическую дисциплину мысли − (*мета*)*логику*, к которой мы здесь и апеллируем. Согласно Хайдеггеровской онтологии имеется два способа мышления: онтический и онтологический. Первому – соответствует тот уровень действительности, который отождествляется с сущим (Seinde). Второй уровень мышления приобщает нас к Бытию (Sein, позже: Seyn). Сущее, по Хайдеггеру, уподобляется природному, физическому, не минуя и человека. Но поскольку человек определённой своей частью принадлежит Бытию, автор называет его вот-бытием, *Dasein*. Далее, Бытие есть бытие сущего, взятого как целое. К нему применяется привация, что даёт Ничто. Кроме того, Бытие наделяется временем, а всё временнóе есть царство движения. Это отличает Хайдеггеровское Бытие от бытия Платоновских идей, или эйдосов. Платоновское бытие, как пишет французский комментатор Хайдеггеровской онтологии Жан Гронден, получает своё определение только от не-временного, то есть речь идёт о негативном определении его сущности. Да и в метафизической перспективе «бытие» и «время» противостоят друг другу [11. С. 63]. «У Хайдеггера же всё иначе. Бытие и время перестают быть антагонистами и становятся понятиями, которые определяют друг друга» [11. С. 63−64].

Обращаем внимание на следующую мысль Хайдеггера: «Бытие как таковое открывает свою потаённость во времени. Таким образом, время указывает на непотаённость, то есть истину бытия» [12. С. 33]. С ней сочетается указание на то, что Бытие, соотносимое с Dasein, есть источник человеческой речи. Этот источник автор обозначает термином «сказ Бытия». «Мысль, пробивающаяся в этом направлении, − пишет он, − не нападает на логику, но тратит себя на достаточное определение *логоса*, то есть того сказа, в котором даётся слово бытию как *единственно* достойному осмысления» [12. С. 380]. В языке, в слове, исходящем из Бытия, содержится и язык математики. Но главное − логос. Логос в фундаментальной онтологии совершил революцию в теории познания.

Раньше теория познания, или эпистемология, представлялась в виде следующей схематичной последовательности когнитивных актов:

$$\textit{ощущение} \rightarrow \textit{восприятие} \rightarrow \textit{представление} \rightarrow \textit{понятие}.$$

Хайдеггер показал, что эта схема принципиально ложная. Адекватная эпистемология не может быть построена при абстракции от человеческого тела. «Теория возникновения „представления“ из чувственного восприятия, − пишет он, − чистая мистификация. То есть говорят о вещах, которые вообще не подтверждаются и являются чистым вымыслом, конструкциями, исходящими из вычисляющего каузально-теоретического объясняющего отношения к сущему. Это некое перетолкование мира. Перетолкование, при котором нет тела человека в мире. Но даже фантазирование, отмечает Хайдеггер, может быть увидено как направление в мир, и происходить оно может только в мире: «Ведь фантазирование по поводу золотой горы происходит только так, словно она где-то в мире стоит. И при таком фантазировании есть ведь не только эта изолированная золотая гора. Я воображаю золотую гору не в своём сознании и не внутри мозга, а в мире, в ландшафте, который со своей стороны, опять-таки, связан с миром, в котором я телесно экзистирую» [3. С. 236−237].

Телесно экзистировать значит принадлежать, по словам Хайдеггера, бытию-в-мире. «Однако бытие-в-мире, − отмечает автор, − не исчерпывает себя в телеснении. Например, бытию-в-мире принадлежит также понимание бытия, то есть понимание того, что я стою в просвете бытия, и того, как бытие в понимании определено» [3. С. 272]. А «отвлечение» (Weg sein) от тела, «о котором можно говорить, когда мы „душой и телом“ во что-то вовлечены, подразумевает, что на тело не обращают внимания» (там же). К этому надо добавить, что конечность существования человека, как вот-бытия (Dasein), во времени, обусловливает *пространственную конечность его тела.* Если полагать, что этот факт имеет общенаучный характер, то он должен был бы найти отражение в геометрии. И мы действительно находим в ней его отражение в виде конечной «абсолютной длины». Вместе с данным параметром в геометрию Лобачевского вводится фактор времени. Становится понятно, отчего и почему гиперболическая геометрия превращается в параболическую геометрию, когда константа Лобачевского стремится к бесконечности ($k_L \rightarrow \infty$).

Логика, по которой можно судить о мгновенных взаимопревращениях вещественных и мнимых точек на прямой Лобачевского, как раз соответствует фундаментальной онтологии Хайдеггера. Повторим ещё раз: последняя инстанция, где находит применение привация, есть Бытие. Диалектическое отрицание Бытия даёт Ничто. А Ничто во времени означает мгновенное обращение времени (у времени недостаёт времени для своего обращения). Эти мгновенные акты бытийной темпоральности и выражаются посредством необычных точечных видоизменений на прямой Лобачевского.

Большинство учёных соискателей геометрической истины ставят в центр внимания синтез (сведение к единству) линейной и угловой меры геометрических объектов. На пути к этому синтезу стоял принцип однородности геометрических величин, и требовалось его превзойти. Применительно к геометрии мы находим следующее определение этого принципа, данное А.П. Норденом: «Так называемый „принцип однородности“ состоит в том, что линейная величина сама по себе не может определяться числом до тех пор, пока не выбран некоторый отрезок, принятый за единицу измерения. Поэтому во всякую формулу, содержащую линейные отрезки, должны входить только *отношения* этих отрезков. Таковы, например, тригонометрические соотношения между элементами прямоугольного треугольника, формулы сферической тригонометрии и т. д.» (см. примеч. к стр. 299 в соч. [13]). В частности, добавляет Норден, не может существовать соотношения между сторонами и углами треугольника, в которые входил бы только один отрезок: в формулы прямолинейной тригонометрии входят отношения сторон или других элементов треугольника, а в формулы сферической тригонометрии – отношение стороны (дуги большого круга) к радиусу сферы» [Там же].

Лобачевский прекрасно понимал важность решения задачи, связанной с требованием этого принципа, изложенным выше. Тем не менее он не считал, что это требование нельзя преодолеть. Ещё за три года до того, как он передал факультету свой знаменитый доклад, содержащий развёрнутое изложение неевклидовой (Воображаемой) геометрии[2], он высказал мысль, которая свидетельствует о том, что он не считается с тем запретом, который налагается на геометрические исследования со стороны негативного, ложно понимаемого, содержания принципа однородности. В статье «Геометрия», опубликованной в 1823 году, Лобачевский писал:

«<…> задачи тригонометрии должны состоять в том, чтоб находить величину трёх частей треугольника, когда другие три даны (имеются в виду стороны и углы треугольника. – *Л.А.*). После будет видно, что треугольники не всегда бывают одинаковы, когда у них только углы равны, следовательно, и Тригонометрия не может дать способа для определения сторон треугольника, когда только его углы известны. Некоторые математики невозможность определения линий помощью углов хотели принять за основание геометрии, но такое основание недостаточно, потому что разнородные величины („коликие“) могут быть в зависимости друг от друга» [13. С. 245]. Однако, заключает он, «не надобно следовать тем, которые хотели допустить в основании геометрии начало подобия, разнородности линий с углами».

[2] Это произошло 23 (11) февраля 1826 года.

Лобачевский устранил эту разнородность линий с углами, но не в ней он видел сущность Общей геометрии.

Сущность в Общей геометрии − движение, выраженное геометрическими средствами. Движение стоило бы отличать от (понятия) смещения. Мы можем, скажем, смещать точку, взятую на окружности или на прямой линии, в одном и другом (противоположном) направлении, не замечая различий. Именно так и обстоит дело в евклидовой геометрии. Для изображения же движения требуется указание различия между противоположными направлениями. В Общей геометрии эта возможность появляется при замене тригонометрических функций $\sin x$ и $\cos x$ гиперболическими функциями $shx = -i\sin ix$ и $chx = \cos ix$, которые реализуются в форме комплексно сопряжённых чисел $chx + shx$ и $chx - shx$. Дискретный переход, совершаемый от комплексных чисел $z = a + ib$ к комплексно сопряжённым числам $\bar{z} = a - ib$, и есть показатель движения в Общей геометрии.

Изложенное содержание геометрии Лобачевского мы отождествляем с геометрической картиной мира на том основании, что её положения служат как источником математических истин, так и вносят свой вклад в развитие физики и философии. Более того, речь идёт о тех математических истинах, которые не могут быть получены вне рамок Общей геометрии. Этого-то долгое время (в течение двух-трёх десятилетий) не могли понять многие математики, полагая, что не могут быть истинными теоремы, доказанные на основе непонятных для них геометрических положений. Характерный пример – случай с М.В. Остроградским (1801–1861), крупным специалистом в области интегрального исчисления. Напомним, что по запросу Российской Академии наук, членом которой не был Лобачевский, Остроградский в июне 1842 г. составил рапорт, в котором даётся оценка мемуара Лобачевского о сходимости рядов и математического творчества автора Общей геометрии в целом. В рапорте записано: «Автор этого мемуара, г-н Лобачевский, ректор Казанского университета, уже известен, по правде говоря, с довольно невыгодной стороны, новой геометрией, которую он называет воображаемой…». За этим пассажем следует резюме: «Нам кажется, что мемуар г-на Лобачевского о сходимости рядов не заслуживает одобрения Академии» [1, т. V. С. 266].

Остроградский не мог понять, как Лобачевский смог вычислить некоторые определённые интегралы, которые, как ему казалось, имеют другие значения. А секрет Лобачевского был прост. Автор Воображаемой геометрии в ряде случаев вычислял определённые интегралы как площади геометрических фигур, расположенных на гиперболической поверхности (замена тригонометрических функций функциями логарифмическими «во всех тех выражениях, к которым приводит Сферическая Тригонометрия» [1, т. III. С. 181].

В отношении физики достаточно отметить тот факт, что имеется изоморфизм между четырёхмерной однородной группой Лоренца в специальной теории относительности и группой движений «в трехмерной геометрии Лобачевского» [2. С. 494]. Отношения же с философией и логикой раскрыты в данном тексте.

Литература

1. *Лобачевский Н. И.* Полн. собр. соч. в пяти томах. М.– Л.: Гостехиздат, 1946–1951.
2. *Ефимов Н. В.* Высшая геометрия. М.: Физматгиз, 1961. 580 с.
3. *Хайдеггер Мн.* Цолликоновские семинары (Протоколы – Беседы – Письма) / пер. с нем. языка И. Глуховой. Вильнюс: ЕГУ, 2012. 404 с.
4. *Антипенко Л. Г.* Проблема неполноты математической теории и онтологические предпосылки её решения. М.: ЛЕНАНД, 2022. 152 с.
5. *Гуревич В., Волмэн Г.* Теория размерности. М.: ИЛ, 1948.
6. *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? 10-е изд., стер. М.: МЦНМО, 2022. 568 с.
7. *Клейн Ф.* О так называемой не-евклидовой геометрии // Об основаниях геометрии. М.: Гостехиздат, 1956. С. 253–303.
8. *Владимиров Ю. С.* Пространство-время. Явные и скрытые размерности. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2015. 206 с.
9. *Каган В. Ф.* Основания геометрии. Учение об основании геометрии в ходе его исторического развития. Часть первая: Геометрия Лобачевского и её предистория (при участии Я. С. Дубова). М.– Л.: Госиздат технико-теорет. литературы, 1949. 492 с.
10. *Лузин Н. Н.* Об арифметических методах математиков XVII века // Вопросы истории естествознания и техники. 1993. № 4. С. 25–35.
11. *Гронден Жан.* Поворот в мышлении Мартина Хайдеггера / пер. с франц. А. П. Шурбелёва. СПб.: Русский мир, 2011. 252 с.
12. *Хайдеггер Мартин.* Время и бытие. М.: Республика, 1993. 447 с.
13. *Лобачевский Н. И.* Три сочинения по геометрии. М.: Гостехиздат, 1956.

ON THE GEOMETRIC PICTURE OF THE WORLD IN THE LIGHT OF HEIDEGGER'S ONTOLOGY

Leonid G. Antipenko*

Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences
1 build., 12 Goncharnaya St, Moscow, 109240, Russian Federation

Abstract. Until recently, there was one unsolved riddle regarding the logic that Lobachevsky followed when creating his non-Euclidean (hyperbolic) geometry. This article shows that such a logic is implicitly present in him, and it coincides with the logic already formed now, called complementary-dialectical logic. This logic stems from Heidegger's fundamental ontology. In the field of the geometric discipline of thought, complementary-dialectical logic makes it possible to combine the historical and logical aspects of the genesis of Lobachevsky's geometry. Allows us to understand how and why imaginary points appear on a hyperbolic line, how they are related to points at infinity, etc. constructing a geometric picture of the world as part of the overall scientific picture.

Keywords: geometry, movement, time, fundamental ontology, scientific and philosophical

[*] E-mail: chistrod@yandex.ru